

U1 x U2 x U3: Quantum Visions

Stefan Heusler[†], Gregor Schwellenbach, Michael Tewiele

[†]Institut für Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster, Germany

Abstract. Im Projekt [Quantum Visions](#) sind im Verlaufe von 15 Jahren (2008-2023) Animatinonen zu einer Vielzahl von Themen moderner Quantenphysik entstanden. Kern des Projektes ist ein visueller Zugang zu Themen der Quantenphysik, der zwar auf den theoretischen und experimentellen Grundlagen der Quantenphysik aufbaut, diese aber in einer eigenständigen "Bildersprache" darstellt, die auch ohne tiefere mathematische Kenntnisse zugänglich ist. Mit dieser Dokumentation werden einige Grundlagen des Projektes erläutert. Weiterhin werden alle Texte zur Verfügung gestellt und zur schnellen Orientierung mit den entsprechenden Animationen verlinkt. Für genauere Erläuterungen der mathematischen Grundlagen verweisen wir auf die Dokumentation zur englischsprachigen Version des Projekts. Der Teil U1: Quantumdimensionen aus der Trilogie U1xU2xU3 Quantum Visions wurde als DVD im Jahr 2010 von [SCIENCeMOTION](#) veröffentlicht.

Contents

1	U1: Quantendimensionen	8
1.1	Pyramide der Wahrscheinlichkeit – Klassische Teilchen (U1-01)	8
1.1.1	Binomiale Wasserpyramide	8
1.1.2	Teilchen und Wege	8
1.1.3	Wege und Wahrscheinlichkeiten	8
1.1.4	Wahrscheinlichkeiten und Messungen	9
1.1.5	Zwei Stufenpyramiden	9
1.1.6	Zusammenfassung	10
1.2	Schallinterferenz – Klassische Wellen (U1-02)	10
1.2.1	Schallschwebungen	10
1.2.2	Stimmgabeln	10
1.2.3	Drehendes Rad	11
1.2.4	Rad und Stimmgabel	11

1.2.5	Zwei Stimmgabeln	12
1.2.6	Interferenz	12
1.2.7	Schallintensität	13
1.2.8	Schwebung	13
1.3	Reflexionswahrscheinlichkeit – Photonen am Strahlteilerwürfel (U1-03)	14
1.3.1	Reflexion und Transmission	14
1.3.2	Laserstrahl am Strahlteilerwürfel	14
1.3.3	Einzelne Photonen am Strahlteilerwürfel	14
1.3.4	Wahrscheinlichkeit von Reflexion und Transmission	15
1.4	Lichtinterferenz – Welleneigenschaft von Licht an einer Seifenhaut (U1-04)	16
1.4.1	Schillernde Farben	16
1.4.2	Interferenzmuster auf der Seifenhaut	16
1.4.3	Wellentheorie von Licht	16
1.4.4	Der Thaleskreis – Interferenz an dünnen Schichten	17
1.5	Das Doppelspaltexperiment – Ein Meilenstein der Physikgeschichte (U1-05)	17
1.5.1	Licht am Anfang des 19. Jahrhunderts	17
1.5.2	Einfachspalt-Experiment	18
1.5.3	Beugungsmuster am Einfach- und Doppelspalt	18
1.5.4	Einzelne Photonen am Einfach- und Doppelspalt	18
1.6	Das Herz der Quantenmechanik – Wie ein drehendes Rad zum Herzen wird (U1-06)	19
1.6.1	Interferenz und Wahrscheinlichkeit	19
1.6.2	Einfach- und Doppelspalt mit sehr vielen Photonen	19
1.6.3	Interferenz als Vektorsummen	20
1.6.4	Einfach- und Doppelspalt mit einzelnen Photonen	20
1.6.5	Wahrscheinlichkeitsverteilung	21
1.6.6	Welleninterferenz und Teilchenwahrscheinlichkeit	21
1.7	Wege in die Quantendimension – Das Pfadintegral	23
1.7.1	Am Rad drehen	23
1.7.2	Der Laserstrahl im leeren Raum	23
1.7.3	Wege und Wahrscheinlichkeiten in der Quantendimension	23
1.7.4	Die Cornu-Spirale	24
1.7.5	Das Michelson Interferometer	24
1.8	Polarisation von Licht – Von Schwingungsknoten und -bäuchen (U1-08)	25
1.8.1	Polarisation	25
1.8.2	Polarisationsfilter-Experiment	25
1.8.3	Polarisationsfilter und Polarisationsdreher	26
1.8.4	Polarisation beim einzelnen Photon	26

1.8.5	Wahrscheinlichkeitsverteilung	26
1.8.6	Wahrscheinlichkeit und Interferenz	27
1.8.7	Polarisation eines Photons in der Quantendimension	27
1.8.8	Zusammenfassung	28
1.9	Korrelationsfunktion - Wie der Zufall es so will (U1-09)	28
1.9.1	Zwei Zufallsmuster	28
1.9.2	Zwei Münzen, eine Münze	28
1.9.3	Korrelationsfunktion	29
1.9.4	Theorie und Experiment	29
1.10	Kombinierte Polarisationsmessung – Zur Metapher der zwei Türen (U1-10)	29
1.10.1	Zwei-Türen-Metapher	30
1.10.2	Die Detektoren "Alice" und "Bob"	30
1.10.3	Korrelationsfunktion	31
1.11	Verschränkte Photonen – Vom Vorher und Nachher einer Messung (U1-11)	31
1.11.1	Doppelbrechung	31
1.11.2	"Fern- oder Nahschach": Omegas Schatten an der Wand	31
1.11.3	Experiment mit verschränkten Photonen	31
1.11.4	Die verschränkte Schwingung Omega	32
1.11.5	Die rotierende Münze	32
1.11.6	Der "Omega-Donut" in der Quantendimension	33
1.11.7	Visualisierung des Messprozesses	33
1.11.8	Berechnung der Korrelationsfunktion	34
1.11.9	Alices und Bobs Messreihen	35
1.11.10	Messung der Korrelationsfunktion	35
1.11.11	Schattenwelt und Quantendimension	35
1.12	Bellsche Ungleichung (U1-12)	36
1.12.1	"Vielleicht wurde er ermordet"	36
1.12.2	Experimentelle Bestimmung der Korrelationsfunktion oder ein "Quentchen Trost"	36
1.12.3	Die "spukhafte" Quantendimension auf dem Prüfstand	37
1.12.4	Erklärungsversuch mit verborgenen Parametern anstelle der Quantendimension	38
1.12.5	Bellsche Ungleichung	39
1.12.6	Vergleich von Theorie und Experiment	39
1.12.7	Die Wahrheit ist... Interpretationen der Quantenmechanik	39
1.13	Auf dem Höhenpass der Quantenmechanik – Rückblick und Grenzbegehung (U1-13)	40
1.14	Quantencomputer (U1-14)	40
1.14.1	Schachbrett-Muster	40
1.14.2	Der klassische Computer	40

1.14.3	Raum der Wahrscheinlichkeiten	41
1.14.4	Ein Qubit	41
1.14.5	Zwei Qubits	42
1.14.6	Die vier Bell-Zustände in der "Siebten Dimension"	42
1.14.7	Lokale und nichtlokale Dimensionen	42
1.14.8	Nichtlokale Reiskörner	43
1.14.9	Zukunft der Quantenmechanik "Die Wahrheit ist ..."	45
2	U2: Quantenspiegelungen	46
2.1	Von Bildern des Schalls (U2-1)	46
2.1.1	Drehende Räder	46
2.1.2	Schallwellen und Schallintensität	47
2.1.3	Phase der Schallwelle	47
2.2	Schallinterferenz (U2-2)	48
2.3	Vom Gemisch der Frequenzen (U2-3)	48
2.3.1	Von der Welle zur Quelle	48
2.3.2	Fouriertransformation	49
2.4	Von schwingenden Saiten (U2-4)	50
2.4.1	Schwingende Gitarrensaite	50
2.4.2	Spektrum der Gitarrensaite	50
2.4.3	Stehende Wellen	50
2.5	Kugelschwingungen (U2-5)	52
2.5.1	Wasserwellen	52
2.5.2	Chladni-Figuren	53
2.5.3	Schwingende Tasse	54
2.5.4	Schwingende Seifenblase	55
2.5.5	Kugelflächenfunktion	56
2.6	Vom Planck'schen Wirkungsquantum als Knotenlinienquant (U2-6)	57
2.6.1	Kerze und Spiegel	57
2.6.2	Drehoperator	57
2.6.3	Spektrum des Drehoperators	59
2.6.4	Quantenspiegel	59
2.7	Vom Spiegel in der Mitte (U2-7)	60
2.7.1	Spiegel-Spuk	61
2.7.2	Spin	61
2.7.3	Stern-Gerlach Experiment	62
2.8	Von Bohr zur Quantendimension (U2-8)	63
2.8.1	Treppenstufen	63
2.8.2	Atomare Spektren	63
2.8.3	Balmer-Formel	64
2.8.4	Rutherford-Streuung	65

2.8.5	Bohrsches Atommodell	66
2.8.6	Zustände und Operationen beim H-Atom	68
2.8.7	Atomorbitale	69
2.8.8	Periodensystem	70
2.9	Vom Tanz der Elektronen (U2-9)	73
2.9.1	Quantenorgel	73
2.9.2	Helium-Neon-Laser	73
2.9.3	Quantenknoten	74
2.9.4	Pauli-Prinzip	76
2.9.5	Gitarrenspiegelung	77
3	U3: Quantensymmetrien	79
3.1	Permutation und Transformation (U3-1)	79
3.1.1	Schattenwelten	79
3.1.2	Klangpermutationen (U3-1-02)	80
3.1.3	Operation mit Musikstücken	81
3.1.4	Operation mit Qubits	82
3.2	Quantenkryptographie (U3-2)	83
3.2.1	Alice Schachbrett-Code	83
3.2.2	Zufallsschlüssel	83
3.2.3	Quantenkryptographie	83
3.3	Topologie der Quantendimension (U3-3)	85
3.3.1	Omegas Geheimlabor	85
3.3.2	Komplexe Drehung	85
3.3.3	Komplexifizierte Funktion	86
3.3.4	Komplexe Quantendimension	87
3.3.5	Spin und Polarisation	87
3.3.6	Topologie und Quantenknoten	88
3.3.7	Twists	89
3.3.8	Alice und Omega	90

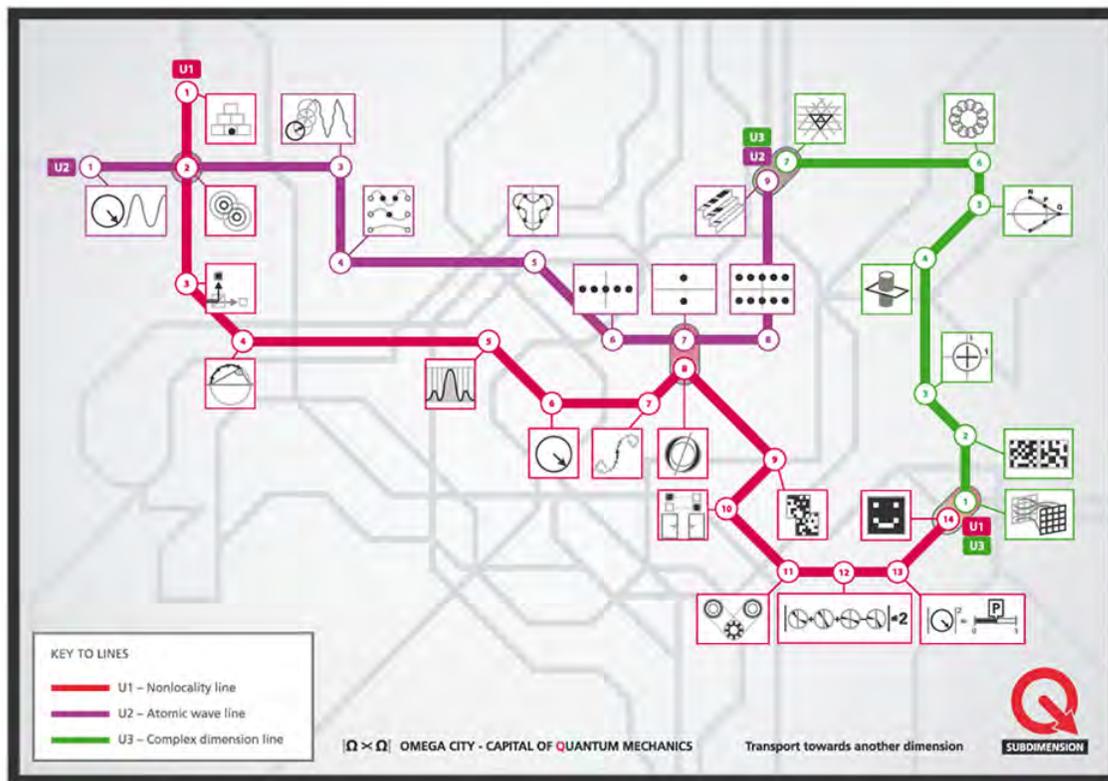


Figure 1. Übersicht über die Lernstationen von OmegaCity

U1 x U2 x U3: QuantumVisions

Im Projekt [QuantumVisions](#) werden Themen der Quantenphysik in einer mathematisch fundierten Bildersprache dargestellt, die u.a. auf dem Zeigerformalismus von R. Feynman aufbaut. Wesentlich ist dabei die Unterscheidung von vier Repräsentationsebenen: Zum einen unterscheiden wir Theorie und Experiment. Beim Experiment werden solche mit einzelnen Quanten unterschieden von solchen mit sehr vielen Quanten. Bei der Theorie unterscheiden wir Wahrscheinlichkeiten und Amplituden, siehe Abb. 2 für das Beispiel von Photonen.

Die Themenfelder sind in drei U-Bahnlinien zu folgenden Oberthemen angeordnet:

- U1 Quantendimensionen: Doppelspaltexperiment, Polarisationsverschränkung, Grundideen des Quantencomputers
- U2 Quantenspiegelungen: Stehende Wellen, Atommodelle, Aufbau der Periodensystems
- U3 Quantensymmetrien: Quantenkryptographie, Topologische Eigenschaften von Fermionen und Bosonen in der Quantendimension

Die einzelnen Stationen der U-Bahnlinien durchqueren die in vielen Aspekten noch unbekannte Omega-City, deren Umrisse seit dem Beginn der Quantenphysik zu Beginn

des 20. Jahrhunderts Jahre erst nach und nach zum Vorschein kommen. "Omega" ist die Metapher für verschränkte Zustände im Hilbertraum, z.B. in der U1 für den Bell-Zustand $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

Gleichzeitig ist Omega auch die unsichtbare Person, nach der Alice und Bob im Spielfilm [Schattenwelten](#) suchen. Im Spielfilm begeben sich Alice und Bob auf eine Reise in die Quantendimensionen von Licht. Die Reise beginnt mit der Suche nach dem mysteriösen Omega, der wegen seiner Quantenforschung verschwunden sein soll. Alice und Bob treffen den Hausmeister von Omega – gespielt von Harald Lesch. Ohne dass sie es ahnen, führt der Hausmeister die beiden in ein unsichtbares Netzwerk einer anderen Dimension – der Subdimension.

Die Faszination der Quantenphysik beruht auf dem Wechselspiel zwischen beobachtbaren und unbeobachtbaren Größen. Die Detektoren Alice und Bob können den Quantenzustand $|\Omega\rangle$ nicht direkt beobachten: Die Verschränkung kann nur indirekt nachgewiesen werden.

Entsprechend ist die tatsächliche Handlung des Spielfilms nicht direkt beobachtbar und entzieht sich kausaler oder chronologischer Zusammenhänge. In den U-Bahnlinien U1, U2 und U3 werden die versteckten Bildhinweise wie Puzzlesteine neu zusammengesetzt und bilden sozusagen den Einstieg in die Subdimension, wohin die eigentliche Reise geht.

Die Animationen der Subdimension sind in mehreren [Produktionsphasen](#) zwischen den Jahren 2008-2023 realisiert worden. Bei der Produktion der DVD *Quantendimensionen* (SCIENCeMOTION, 2010) war Alma Lares als Autorin bei den Lernstationen beteiligt. Beim Spielfilm haben Harald Lesch (Hausmeister von Omega), Corianna Bilke (Alice), Christian Roggenkamp (Bob) und Johannes Kindler (Omega) mitgewirkt. Informationen zum gesamten Produktionsteam, alle Animationen sowie weitere Publikationen stehen über die Website www.quantumvisions.net/ in deutscher und englischer Sprache zur Verfügung (CC BY-NC-ND-Lizenz).

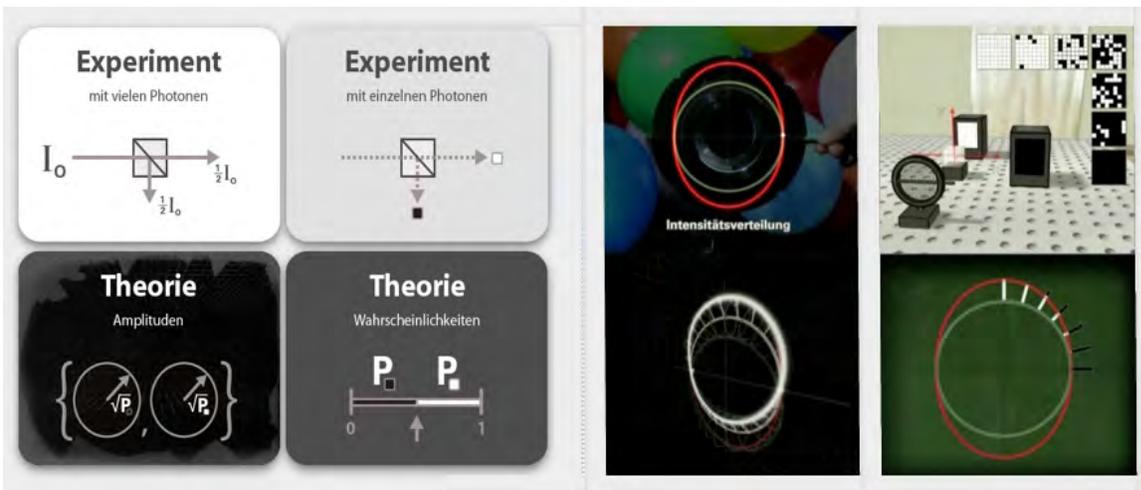


Figure 2. Links: Vier Quadranten-Schema, Rechts: Polarisation des Photons als Anwendungsbeispiel (U1-08)

1. U1: Quantendimensionen

1.1. Pyramide der Wahrscheinlichkeit – Klassische Teilchen (U1-01)

Wie lässt sich das Verhalten klassischer Teilchen beschreiben, wenn wir sie nicht direkt beobachten können? Was geschieht, wenn wir den verschiedenen, möglichen Wegen eines Teilchens eine Wahrscheinlichkeit zuordnen? Verändert das klassische Teilchen durch unsere Messung sein Verhalten?

1.1.1. Binomiale Wasserpyramide [Link zu U1-1-01](#)

Alice und Bob stehen hier vor einem der wichtigsten Beispiele der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung – der Binomialverteilung. Von dieser Wasserpyramide lassen sich für die Quantenmechanik entscheidende Ideen ableiten, auf die wir in den weiteren Stationen zurückgreifen werden.

1.1.2. Teilchen und Wege [Link zu U1-1-02](#)

Im Modell ersetzt Bob Wassermoleküle durch Bälle. Bei dieser Stufenpyramide können wir die verschiedenen Wege der Bälle nachvollziehen. Mit jedem weiteren Stockwerk teilen sich die Wege weiter auf. Je mehr Wege in eine Box führen, desto mehr Bälle landen darin. Wenn wir aber nur einen einzelnen Ball betrachten, können wir dann vor dem Durchlauf etwas über den möglichen Weg des Balls aussagen?

1.1.3. Wege und Wahrscheinlichkeiten [Link zu U1-1-03](#)

Das erste Stockwerk erreicht das Teilchen über zwei mögliche Wege - "Weiß" und "Schwarz" (\square , \blacksquare). Für jede der beiden Möglichkeiten im ersten Stockwerk können wir

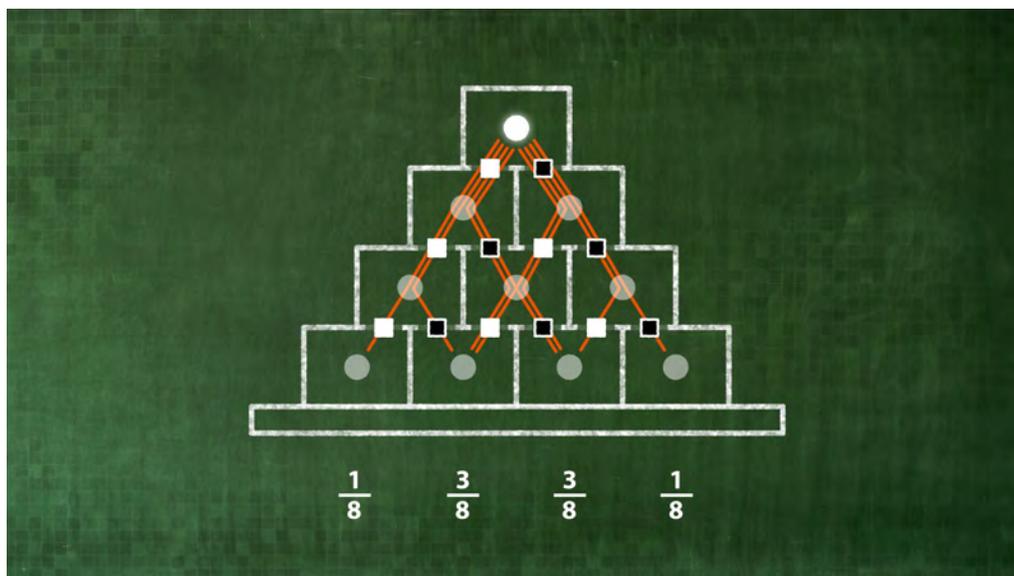


Figure 3. Mögliche Wege durch die Stufenpyramide.

nur eine Wahrscheinlichkeit p_1 angeben.

Vier mögliche Wege führen vom nullten in das zweite Stockwerk. Die Wege "Weiß" - "Schwarz" und "Schwarz" - "Weiß" landen in derselben Box. Vom nullten in das dritte Stockwerk gelangt das Teilchen über acht mögliche Wegkombinationen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen in einer der vier Boxen ergibt sich jeweils aus der Anzahl möglicher Wege in die betreffende Box, die durch die Gesamtzahl der Wegkombinationen - im dritten Stockwerk sind es acht - geteilt wird.

1.1.4. Wahrscheinlichkeiten und Messungen [Link zu U1-1-04](#)

Nun lassen wir ein Teilchen auf einem unsichtbaren Weg bis in das dritte Stockwerk fallen. In welcher der vier Boxen befindet sich jetzt der Ball? Vor der Messung des Aufenthaltsorts kennen wir nur die acht möglichen Wege.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in allen vier Boxen ergibt $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$ gleich hundert Prozent.

Wir öffnen eine Box und machen so eine Messung – der Ball ist gefunden. Das entspricht der Aufenthaltswahrscheinlichkeit von hundert Prozent. Für die anderen Boxen sinken die Wahrscheinlichkeiten automatisch sofort auf Null.

1.1.5. Zwei Stufenpyramiden [Link zu U1-1-05](#)

Wir vergleichen zwei Stufenpyramiden miteinander. Bei der rechten Pyramide öffnen wir eine Box im 3. Stockwerk und versperren den Weg zu dieser Box, bevor die Bälle fallen. Im Vergleich zur linken Pyramide verändern sich in der rechten Pyramide nur in unmittelbarer Nachbarschaft der geöffneten Box die Wahrscheinlichkeiten, und

zwar folgendermaßen: N ist die große Anzahl von Bällen, die durch die Pyramide fallen. In jeder Box landen N mal p Bälle, wenn p die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines einzelnen Balls für die betreffende Box ist. Für das 2. Stockwerk ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für beide Pyramiden noch gleich, nämlich $N/4, N/2, N/4$. Für das 3. Stockwerk ergibt sich für die linke Pyramide $N/8, 3N/8, 3N/8$, und $N/8$. Doch für die rechte Pyramide beläuft sich die Verteilung auf $N/8, 5N/8, 0$, und $2N/8$. Der Wert für die Box links aussen bleibt bei beiden Pyramiden gleich $N/8$. In der rechten Pyramide hat das Öffnen und Versperren der Box schon vor der Messung zu einer lokalen Veränderung der Wahrscheinlichkeiten geführt. Es sind nur die Wahrscheinlichkeiten der direkt benachbarten Boxen betroffen.

Eine lokale Veränderung der Wahrscheinlichkeiten ist unabhängig von der Messung. Eine nichtlokale Veränderung der Wahrscheinlichkeiten erfolgt erst durch eine Messung, ist also von der Messung abhängig.

1.1.6. Zusammenfassung [Link zu U1-1-06](#)

Fassen wir zusammen, was wir über Wege und Aufenthalts-wahrscheinlichkeiten eines einzelnen Teilchens in einer Stufenpyramide herausgefunden haben, und schauen uns dazu den Weg von A nach B eines Teilchens an.

1. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $P(A \text{ nach } B)$ des Teilchens in der Box B ergibt sich als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten P_k jedes möglichen Weges $k = 1, 2, 3$ in diese Box.

2. Die Messung in einer Box hat Einfluss auf die Aufenthalts-wahrscheinlichkeiten in allen anderen kausal verbundenen Boxen, egal wie weit diese Boxen vom Messpunkt entfernt sind. Um von der Pyramide der Wahrscheinlichkeit zur Quantenphysik zu gelangen, ist nun noch ein weiterer Gedankenschritt nötig, mit dem sich die Station U1 – 06 "Das Herz der Quantenphysik" beschäftigt.

1.2. Schallinterferenz – Klassische Wellen (U1-02)

Wie breiten sich klassische Wellen im Raum aus? Ein Beobachter betrachtet die möglichen Wege von Schallwellen. Was passiert, wenn sich die Wellen überlagern, die auf verschiedenen Wegen zum Beobachter gelangen?

1.2.1. Schallschwebungen [Link zu U1-2-01](#)

Neben der Filmmusik ist Omegas Türklingel zu hören. Im Nachhall der Klingel lassen sich periodische Lautstärkeschwankungen heraushören, sogenannte Schwebungen. Wie kommen diese zustande?

1.2.2. Stimmgabeln [Link zu U1-2-02](#)

In diesem Slide diskutieren wir die Begriffe Amplitude und Frequenz von

Schallwellen am Beispiel verschiedener Stimmgabeln. Beim Kammerton A schwingt die Stimmgabel 440 Mal pro Sekunde hin- und her, die Frequenz ist also 440 Hertz.

Schwingt die Stimmgabel schwächer, verkleinern sich die Wellenberge und Täler. Das heißt, dass die maximale Auslenkung, die Amplitude kleiner wird. Der Ton wird leiser. Die Wellenlänge λ bleibt gleich groß. Schwingt die Stimmgabel stärker, vergrößern sich die Wellenberge und Täler und damit die Amplitude. Der Ton wird lauter. Die Wellenlänge λ bleibt gleich groß. Ist die Stimmgabel schwerer, schwingt sie langsamer, das heißt die Frequenz nimmt ab und der Ton wird tiefer. Die Wellenlänge λ vergrößert sich. Ist die Stimmgabel leichter, schwingt sie schneller, die Frequenz nimmt zu und der Ton wird höher. Die Wellenlänge λ verkleinert sich. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Schallwelle von etwa 340 Meter pro Sekunde bleibt konstant. Dabei gilt: Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ist gleich λ mal f .

1.2.3. Drehendes Rad [Link zu U1-2-03](#)

Das drehende Rad als Sinnbild für Frequenz, Amplitude und Phase einer Schwingung wird in der Fachliteratur auch Zeigerformalismus genannt und ist für die Berechnung und Visualisierung von Schwingungen von großem Nutzen. Im Rad befindet sich ein Zeiger der sich mit im Kreis dreht und dessen Länge dem Radius des Rades entspricht (etwas leise). Die Anzahl der Kreisumdrehungen pro Sekunde entspricht der Frequenz der Schallwelle. Der Radius entspricht der Amplitude der Schallwelle. Die Wellenlänge λ ergibt sich aus dem Verhältnis der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c und der Frequenz f .

Wir betrachten den roten Punkt auf der Welle und überlegen, wie man diese Position bzw. die Phase der Welle eindeutig beschreiben kann. Eine Möglichkeit besteht darin, den Abstand δ des Punktes bis zum nächsten Nulldurchgang der Welle zu verwenden. Der Abstand Δ lässt sich umrechnen in den Winkel Φ gleich $2\pi\Delta/\lambda$, also genau die Phase der Schallwelle, die uns bereits in der letzten Station begegnet war. Hier sehen wir nun die mathematische Definition dieser Phase.

1.2.4. Rad und Stimmgabel [Link zu U1-2-04](#)

Wir wollen nun den Zusammenhang von Rad und Stimmgabel genauer erläutern. Die maximale Auslenkung der Stimmgabel gibt ein Maß für den Über- bzw. Unterdruck, den die Stimmgabel in der umgebenden Luft erzeugt. Hieraus ergibt sich die Amplitude bzw. der Radius des Rades, der diese Druckschwankungen beschreiben soll. Schwingt die Stimmgabel schwächer, verkleinern sich die Druck- und Dichteschwankungen. Der Ton wird leiser. Die Amplitude wird niedriger, die Wellenlänge bleibt gleich groß. Schwingt die Stimmgabel stärker, vergrößern sich die Druck- und Dichteschwankungen. Der Ton wird lauter. Die Amplitude wird höher, die Wellenlänge bleibt gleich groß. Schwingt die Stimmgabel langsamer, verkleinert sich die Umdrehungs- frequenz des Zeigers. Der Ton klingt tiefer, die Wellenlänge vergrößert sich. Schwingt die Stimmgabel schneller,

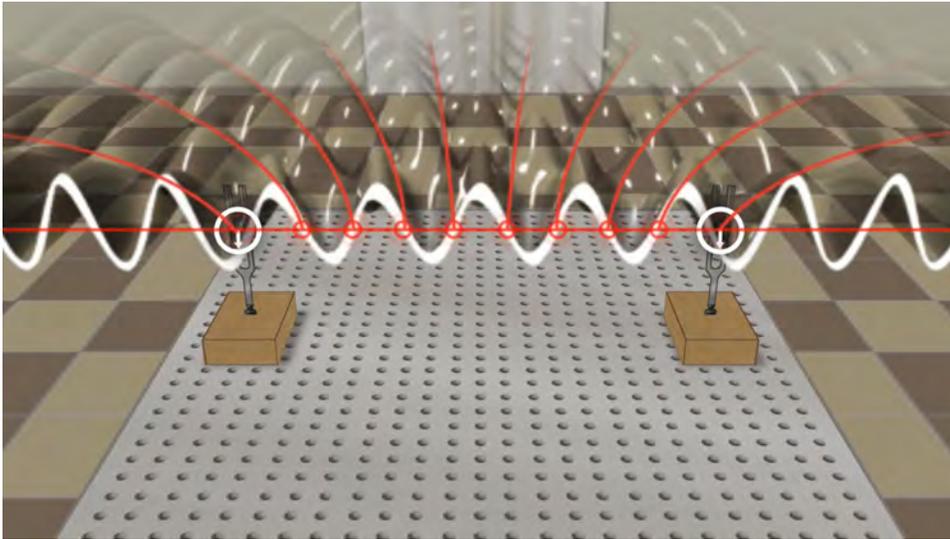


Figure 4. Interferenz von zwei Schallwellen.

erhöht sich die Umdrehungsfrequenz des Zeigers. Der Ton klingt höher, die Wellenlänge verkleinert sich.

1.2.5. Zwei Stimmgabeln [Link zu U1-2-05](#)

Zwei identische Stimmgabeln werden nacheinander angeschlagen. Die erzeugten Schallwellen beider Stimmgabeln überlagern sich bei ihrer Ausbreitung im Raum.

Dort, wo ein Wellenberg auf einen anderen Wellenberg oder ein Wellental auf ein anderes Wellental trifft, verstärken sich die Wellenberge bzw. Wellentäler. Das heißt, der Ton wird insgesamt lauter. Trifft Wellenberg auf Wellental, löschen sie sich gegenseitig aus und an dieser Stelle verebbt der Ton. Nun gibt es auf einer gedachten Verbindungslinie zwischen beiden Stimmgabeln ein besonderes Phänomen: die Überlagerung von einer rechts- und einer linkslaufenden Schallwelle, was man auch als "stehende Welle" bezeichnet. Im Abstand von je einer halben Wellenlänge bilden sich Knotenpunkte, an denen sich beide Schallwellen immer auslöschen.

Dazwischen bilden sich Wellenbäuche, an denen beide Schallwellen sich maximal verstärken. Diese Knotenpunkte sind sozusagen Startpunkte für Knotenlinien auf der hier gezeigten Ebene, und Knotenflächen im Raum. Überall auf diesen Knotenflächen im Raum löschen sich die Schallwellen aus.

1.2.6. Interferenz [Link zu U1-2-06](#)

Aus der Vogelperspektive sind die Positionen der Wellenbäuche und der Verlauf der Knotenlinien besser zu erkennen. Wie lässt sich nun das "neue" Wellengebilde, das durch Interferenz der Schallwellen aus zwei Stimmgabeln erzeugt wird, für einen bestimmten Punkt im Raum mit Frequenz, Amplitude und Phase beschreiben?

Dazu nehmen wir für jede Schallwelle ein drehendes Rad. Nun überlagern sich am Punkt B zwei Schallwellen, was durch die Kombination von zwei Rädern dargestellt wird. Die Interferenz wird mathematisch als Summe beider Schallwellen bestimmt. Das entspricht der Vektoraddition der beiden Zeiger. Am Punkt B weisen beide Zeiger in die gleiche Richtung. Die Phasenverschiebung beträgt Null Grad. Die zwei Radien werden addiert und die Amplitude verdoppelt sich. Beide Schallwellen verstärken sich maximal und die konstruktive Interferenz ist durch die größere Lautstärke zu hören. Der Punkt B wandert weiter, so dass der Gangunterschied Δ eine halbe Wellenlänge beträgt. Beide Zeiger weisen nun in genau entgegengesetzte Richtungen. Die Phasenverschiebung beträgt 180° Grad. Die Addition der beiden Zeiger ergibt Null. Die Amplitude der resultierenden Welle ist damit ebenfalls Null. Die destruktive Interferenz lässt sich hier als Stille wahrnehmen. Punkt B verschiebt sich noch einmal um eine halbe Wellenlänge, so dass beide Zeiger wieder in die gleiche Richtung weisen. Der akustische Effekt ist wieder eine Verdopplung der Amplitude. Die Phasenverschiebung beträgt 360° Grad und entspricht dem Gangunterschied von genau einer Wellenlänge, $\Delta = \lambda$.

1.2.7. Schallintensität [Link zu U1-2-07](#)

Wir betrachten nun die Intensität der resultierenden Schallwelle. Wir können die Schallwellen nicht direkt hören, sondern nur ihre Intensität. Worin liegt der wesentliche Unterschied zwischen der Amplitude der Schallwelle und der Schallintensität? Weniger als absolute Stille gibt es nicht. Mathematisch bedeutet das, dass die Schallintensität nur größer oder gleich Null sein kann. Die Schallintensität I ist proportional zum Quadrat der Amplitude der Schallwelle. Durch das Quadrieren ist die Intensität stets größer oder gleich Null. Der Radius des drehenden Rades bzw. die Amplitude entspricht somit der Wurzel aus der Schallintensität.

Die schnellen Druck- und Dichteschwankungen, die die Stimmgabel erzeugt und beim Ohr ankommen, werden vom Gehirn nicht einzeln aufgelöst, sondern zeitlich gemittelt als Tonhöhe wahrgenommen. Bei der Berechnung der Schallintensität findet daher zusätzlich noch eine zeitliche Mittelung statt.

1.2.8. Schwebung [Link zu U1-2-08](#)

Wir haben jetzt zwei Stimmgabeln angeschlagen, die sich in ihrer Frequenz minimal unterscheiden. Wir hören eine so genannte Schwebung. Das heißt, entlang der Zeitachse nehmen wir Schwankungen hinsichtlich der Lautstärke der resultierenden Schallwelle wahr.

Was ist durch Interferenz mit den Schallwellen der beiden Stimmgabeln geschehen? Ursprünglich haben sich Schallwelle 1 und Schallwelle 2 in der Frequenz unterschieden. Amplitude und Phase waren gleich. Bei der Kombination der beiden drehenden Räder zeigt sich, dass die unterschiedlichen Umdrehungsfrequenzen der Räder zu einer wachsenden Phasenverschiebung in Bezug auf die Zeit führen, was zu der periodischen Lautstärkeschwankung bzw. zur Schwebung führt. Genau dieser Effekt tritt bei Ω Gas

Türklingel auf: Die Überlagerung von Tönen mit sehr ähnlichen Frequenzen ergibt eine Schwebung, was im Nachhall als Lautstärkeschwankung deutlich zu hören ist.

1.3. Reflexionswahrscheinlichkeit – Photonen am Strahlteilerwürfel (U1-03)

Wie verhalten sich Photonen an einem Strahlteilerwürfel? Was können wir mit dem Messergebnis nachweisen?

1.3.1. Reflexion und Transmission [Link zu U1-3-01](#)

Wir sehen am Fenster sowohl das Gesicht des Hausmeisters als auch ein schwächeres Spiegelbild von Alice. Das bedeutet, dass an der Glasscheibe Licht zum Teil reflektiert und zum Teil transmittiert wird. Da Licht aus vielen einzelnen Photonen besteht, können wir uns fragen, wie sich das einzelne Photon an der Fensterscheibe verhält. Anhand des folgenden Experiments am Strahlteilerwürfel werden wir erklären, dass der Zufall es bestimmt, ob ein einzelnes Photon reflektiert oder transmittiert wird.

Wenn wir in der Lage wären, einzelne Photonen wahrzunehmen, könnten wir dann das stark fluktuierende Zufallsmuster von transmittierten (weißes Quadrat, □) und reflektierten (schwarzes Quadrat, ■) Photonen erkennen. Nur durch die überwältigende Anzahl von Photonen mittelt sich der Zufall heraus und wird für unser Auge unsichtbar.

1.3.2. Laserstrahl am Strahlteilerwürfel [Link zu U1-3-02](#)

Ein kontinuierlicher Laserstrahl wirft einen roten Punkt an die Wand. In den Laserstrahl setzen wir einen Strahlteilerwürfel. Dadurch erhalten wir einen zweiten roten Punkt auf der Wand.

Bei dem verwendeten Helium Neon Laser - Wellenlänge gleich 632 Nanometer - mit der Leistung ein Milliwatt treffen pro Sekunde $0,3 \times 10^{16}$ einzelne Photonen auf den Strahlteilerwürfel. Von dieser Anzahl N Photonen werden 50 Prozent reflektiert und 50 Prozent transmittiert. Um dem Zufall bei Transmission und Reflexion auf die Spur zu kommen, müssen wir eine besondere Lichtquelle verwenden, die in der Lage ist, einzelne Photonen kontrolliert zu erzeugen.

1.3.3. Einzelne Photonen am Strahlteilerwürfel [Link zu U1-3-03](#)

Das Besondere am Strahlteilerwürfel besteht darin, dass er die Photonenwelle in genau zwei gleiche Komponenten aufteilt, in eine reflektierte und eine transmittierte. Aber nur einer der Detektoren zeigt ein für uns beobachtbares Signal, weil die Energie eines Photons nur an einem Ort gemessen werden kann. Bei der Messung einer Photonenwelle zeigt dann entweder nur der Detektor "weiß" ein Signal, oder nur der Detektor "schwarz". Im Quantenoptiklabor kann damit der fundamentale Zufall bei Transmission und Reflexion einzelner Photonen experimentell nachgewiesen

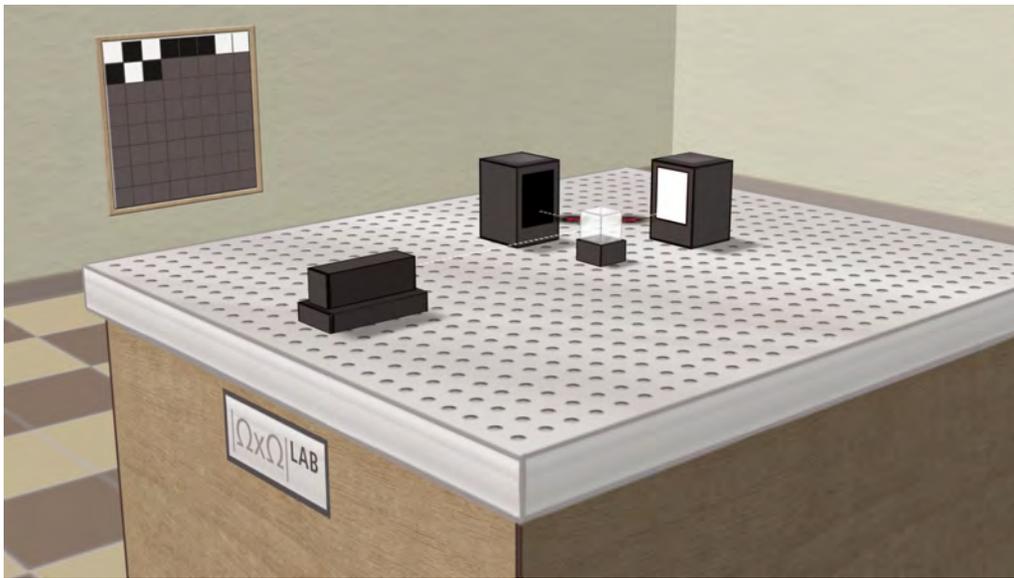


Figure 5. Vor der Messung entsteht ein Superpositionszustand der Amplituden für Reflektion und Transmission, nach der Wechselwirkung mit den Detektoren registriert entweder der Detektor "Weiss" (Transmission) oder "schwarz" (Reflektion) das Signal des Photons.

werden. Wird diese Messung oft hintereinander wiederholt, ergibt sich ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster. Genau dieser Aufbau wird verwendet, um voneinander völlig unabhängige Zufallszahlen zu generieren. Zufall lässt sich nicht berechnen. Daher kann kein Computer echte Zufallszahlen generieren. Dieses Experiment ist so wichtig, weil es eine unerschöpfliche Quelle von echtem Zufall ist.

1.3.4. Wahrscheinlichkeit von Reflexion und Transmission [Link zu U1-3-04](#)

Wenn wir uns eine einzelne Messung anschauen, können wir keine genaue Vorhersage über das Messergebnis treffen. Wir können nur eine Wahrscheinlichkeit angeben, nämlich 50 Prozent für Weiß (\square), und 50 Prozent für Schwarz (\blacksquare). Wir sehen im Bild 64 Messergebnisse für 64 Photonen am Strahlteilerwürfel. Wenn wir von einer 50- zu 50 prozentigen Wahrscheinlichkeit ausgehen, können wir dann auch sagen, dass wir 32 schwarze und 32 weiße Felder haben? Zählen wir nach. Wir erhalten die Anzahl $N(\text{schwarz})$ gleich 31 schwarze Felder und $N(\text{weiss})$ gleich 33 weiße Felder. Es treten zufällige Fluktuationen auf, die um den theoretischen Wert herum schwanken. Je mehr Messungen durchgeführt werden, desto kleiner werden die Schwankungen um den Erwartungswert 50 Prozent. Dies ist die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes. $P(\text{experimentell})$ geht gegen $P(\text{theoretisch})$ für N nach unendlich.

Für unsere Beobachtungen im Alltag bedeutet das, dass wir zu viele Photonen gleichzeitig sehen. Daher fluktuiert für unsere Augen die Intensität nicht und wir können den Zufall nicht sehen. Erst im Quantenoptiklabor beim Experiment mit einzelnen Photonen kann dieser fundamentale Zufall nachgewiesen werden.

1.4. Lichtinterferenz – Welleneigenschaft von Licht an einer Seifenhaut (U1-04)

Was macht Licht, wenn es auf eine dünne Schicht wie eine Seifenhaut trifft? Wie erklärt sich das Phänomen, das wir beobachten können?

1.4.1. Schillernde Farben [Link zu U1-4-01](#)

Ähnlich wie beim Fenster wird das einfallende Licht auf der Seifenhaut sowohl reflektiert als auch transmittiert. Im Unterschied aber ist eine Seifenhaut wenige tausendstel Millimeter dick und somit nur etwas größer als die Wellenlänge des sichtbaren Lichts.

Verändert die Seifenhaut durch Pusten ihre Form, verändert sich auch unser Betrachtungswinkel. Es scheint also eine Abhängigkeit der schillernden Farben von der Dicke der Seifenhaut, vom Betrachtungswinkel, und von der Wellenlänge des Lichts zu geben.

1.4.2. Interferenzmuster auf der Seifenhaut [Link zu U1-4-02](#)

Wir beleuchten eine Seifenhaut mit weißem Licht. Weißes Licht ist ein Gemisch aus verschiedenen Wellenlängen oder Farben. Wir beobachten nun auf der Seifenhaut ein Muster aus verschiedenen farbigen Streifen, wobei die periodische Abfolge der Streifen nach unten immer enger wird.

Wir können davon ausgehen, dass aufgrund der Schwerkraft die Seifenhaut nach unten hin immer dicker wird. Es sieht folglich so aus, als ob das Muster von der Dicke der Seifenhaut abhängt.

Wenn wir überlegen, dass das Licht, das auf die Seifenhaut trifft, von uns ursprünglich als weißes Licht wahrgenommen worden ist, dann scheinen rote und grüne Streifen dort aufzutreten, wo eine Wellenlänge aus dem Gemisch verschwindet. Wird also von dem einfallenden weißen Licht eine Wellenlänge, das heißt eine Farbe ausgelöscht, wird die Komplementärfarbe auf der Seifenhaut sichtbar. Wie lassen sich nun die Auslöschung von einzelnen Wellenlängen, sowie die Intensitätsschwankungen erklären? Die Beobachtungen führen uns ähnlich wie bei den Schallwellen zum Phänomen der Interferenz.

1.4.3. Wellentheorie von Licht [Link zu U1-4-03](#)

Eine Seifenhaut wird nach unten immer dicker. Weiterhin stellen wir das Licht als elektromagnetische Welle dar. Der Einfachheit halber berücksichtigen wir nur die elektrische Feldkomponente. Erinnern wir uns an die Darstellung einer Schallwelle. Ähnlich können wir nun auch eine bestimmte Wellenlänge λ aus dem Lichtspektrum beschreiben. Wir brauchen dazu eine Frequenz, eine Amplitude und eine Phase.

Für die Farbe Rot mit der Wellenlänge $\lambda = 650$ Nanometer beträgt die Umdrehungsfrequenz in etwa 4.6×10^{14} Umdrehungen pro Sekunde. Die Amplitude, die dem Radius R des drehenden Rades entspricht, bestimmen wir aus der Wurzel der einfallenden Lichtintensität I_0 . Ist es möglich, die Zunahme der Seifenhautdicke von einem roten Streifen zum nächsten roten Streifen zu bestimmen?

1.4.4. Der Thaleskreis – Interferenz an dünnen Schichten [Link zu U1-4-04](#)

In jeder Schicht wird ein kleiner Teil des roten Lichts reflektiert. Da die Schichtdicken δ gleich groß sind, sind die Amplituden bzw. die Längen der Zeiger der reflektierten Teilwellen immer gleich groß. Auch die Umdrehungsfrequenzen der Räder, die die reflektierten Teilwellen darstellen, sind identisch. Ähnlich wie bei den zwei Schallwellen aus Station 2 erkennen wir, dass sich nur der resultierende Winkel, der zwischen dem ersten senkrechten Zeiger und dem zweiten Zeiger entsteht, verändert, wenn sich die Welle etwas weiter durch die Seifenhaut bewegt. Die beiden reflektierten Teilwellen überlagern sich und ergeben in der Vektoraddition die gesamte reflektierte Lichtwelle $\sqrt{I_R}$ an dieser Stelle. Nimmt die Dicke d der Seifenwand zu, vergrößert sich auch die Anzahl der Schichten mit Dicke δ . Wir sehen, dass das einfallende Licht folglich in weiteren Schichten reflektiert wird. Aufgrund der Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Schichten durchlaufen die einzelnen Zeiger der jeweiligen reflektierenden Lichtwelle einen Kreis. Wir können also Reflexion und Transmission einer Lichtwelle an einer Seifenhaut durch einen Thaleskreis beschreiben. Dabei stehen die Zeiger für reflektierten und transmittierten Anteil immer senkrecht zueinander. Mit zunehmender Dicke der Seifenhaut nach unten wird der Thaleskreis mehrfach durchlaufen. Der wiederholte Durchlauf entspricht der periodischen Abfolge von Minima und Maxima der Reflexion bzw. Transmission.

1.5. Das Doppelspaltexperiment – Ein Meilenstein der Physikgeschichte (U1-05)

Was passiert, wenn Licht durch einen Einfachspalt bzw. durch einen Doppelspalt fällt? Wie verhalten sich die einzelnen Photonen am Einfach- und am Doppelspalt? Welche Schlussfolgerungen können wir aus den Messergebnissen ziehen?

1.5.1. Licht am Anfang des 19. Jahrhunderts [Link zu U1-5-01](#)

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts führte der englische Physiker Thomas Young ein einfaches und doch wegweisendes Experiment mit Licht durch. Von einer kohärenten Lichtquelle fällt durch eine Blende mit zwei engen Spalten Licht auf einen Beobachtungsschirm. Young konnte mit dem Muster, das sich auf dem Schirm abzeichnete, zeigen, dass Licht sich wie eine Welle verhält, denn das Muster entspricht einem Interferenzmuster. Wir untersuchen in der fünften Station und das Verhalten von Licht an einer Blende, die sogenannte Beugung von Licht, indem wir uns zuerst

das Muster, das aufgrund eines Einfachspalts entsteht anschauen, und danach mit dem Muster des Doppelspalt verglichen.

1.5.2. *Einfachspalt-Experiment* [Link zu U1-5-02](#)

Ein Laserstrahl trifft auf den Einfachspalt. Was passiert, wenn wir die Spaltöffnung immer weiter verkleinern? Wir beobachten, dass der rote Punkt auseinander fließt und dabei helle und dunkle Streifen entstehen. Licht trifft nach dem Spalt also nicht nur auf dem geraden Weg auf den Schirm, sondern geht alle mögliche Wege mit schwankenden Intensitäten, so dass wir die Streifen an verschiedenen Stellen des Schirmes sehen. Es entsteht ein sogenanntes Beugungs- bzw. Interferenzmuster.

1.5.3. *Beugungsmuster am Einfach- und Doppelspalt* [Link zu U1-5-03](#)

Bei einem sehr engen Spalt, der in etwa der Größe der Wellenlänge des Laserstrahls entspricht, sehen wir als Beugungsmuster in der Mitte des Schirms ein Hauptmaximum und am Rande das erste Nebenmaximum.

Welches Muster wird erkennbar, wenn ein zweiter enger Spalt geöffnet wird? Eine Verdopplung des Musters vom Einfachspalt?

Beim Doppelspalt erscheint auf der Mitte des Schirms wiederum ein intensiv leuchtendes Hauptmaximum, was im Vergleich zum Einfachspalt allerdings schmaler ist. Des Weiteren beobachten wir, dass die Abstände zwischen den verschiedenen Maxima kürzer sind als beim Einfachspalt. Anhand des eindeutig erkennbaren Interferenzmusters bewies Thomas Young den Wellencharakter des Lichts.

1.5.4. *Einzelne Photonen am Einfach- und Doppelspalt* [Link zu U1-5-04](#)

Inzwischen können wir im Quantenoptiklabor mit einzelnen Photonen Experimente durchführen.

Beim Einfachspalt ergibt sich erst nach einer gewissen Zeit eine Photonverteilung, die der Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Laserlichts und damit dem Beugungsmuster am Einfachspalt entspricht.

In Analogie zum kontinuierlichen Laserstrahl stellt sich wiederum die Frage, welches Muster zu sehen sein wird, wenn ein zweiter Spalt geöffnet wird? Werden die einzelnen Photonen ein Interferenzmuster erzeugen, und zwar analog zum Muster der kontinuierlichen Welle mit maximaler Intensitätsverteilung in der Mitte des Schirms und mehreren Nebenmaxima zum Rand hin? Oder ergibt sich nun die Dopplung des Einfachspalt-Musters?

Im Experiment wird deutlich, dass sich auch beim Doppelspalt nach einer gewissen Zeit eine Photonverteilung ergibt, die mit der Intensitätsverteilung bei einem kontinuierlichen Laser vergleichbar ist. Das Muster bei einzelnen Photonen am Doppelspalt fordert uns zu folgender Schlussfolgerung heraus: Interferenz findet auch dann statt, wenn nur ein einzelnes Photon durch den Doppelspalt zum Schirm fliegt. Das

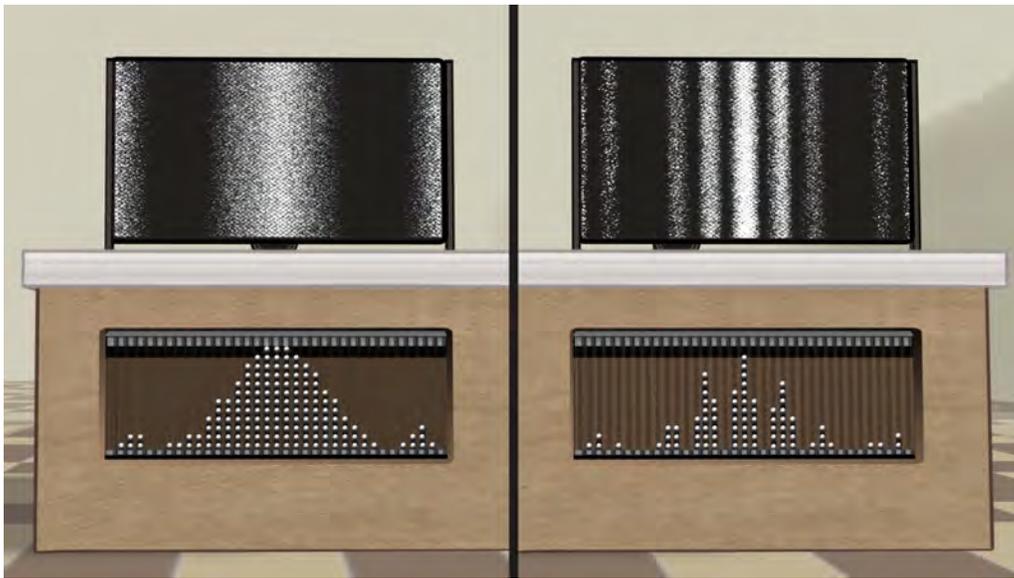


Figure 6. Vergleich von Einfach- und Doppelspalt

einzelne Photonen muss demzufolge mit sich selbst interferieren. Die Kombination von Teilchen- und Welleneigenschaften führt uns zur Lösung des Rätsels "Selbstinterferenz des Photons" und zum Herzen der Quantenmechanik.

1.6. Das Herz der Quantenmechanik – Wie ein drehendes Rad zum Herzen wird (U1-06)

Welche Erkenntnisse ergeben sich, wenn wir die Lichtintensität beim Doppelspalt zum einen anhand des Teilchenbildes und zum anderen anhand des Wellenbildes berechnen? Wohin führt eine Kombination beider Rechenwege?

1.6.1. Interferenz und Wahrscheinlichkeit [Link zu U1-6-01](#)

Das Photon als Welle – Das Photon als Teilchen. Die beiden Aussagen erscheinen uns widersprüchlich, vor allem wenn wir Experimente mit sehr vielen Photonen auswerten. Dort verwischen die zwei Beschreibungen, denn viele Lichtquanten sehen zusammen wie eine Welle aus. Beide Darstellungen ergänzen einander und führen konsequent weiter gedacht zu keinem Widerspruch.

1.6.2. Einfach- und Doppelspalt mit sehr vielen Photonen [Link zu U1-6-02](#)

Wenden wir uns zuerst diesen Experimenten zu und vergleichen das Interferenzmuster am Einfachspalt mit dem am Doppelspalt.

Erstens sehen wir nach Öffnen des zweiten Spalts mehr Maxima und Minima. Zweitens nehmen wir uns einen Vergleichspunkt P und erkennen, dass am Punkt P beim Doppelspalt viel weniger Lichtintensität auf den Schirm trifft als beim Einfachspalt.

Drittens ist beim Doppelspalt die Lichtintensität in der Mitte des Schirms höher als beim Einfachspalt.

1.6.3. Interferenz als Vektorsummen [Link zu U1-6-03](#)

Wir betrachten einen kontinuierlichen Laserstrahl am Einfachspalt und erklären das Interferenzmuster anhand der Wellentheorie. Dabei wird der Laser als elektromagnetische Welle beschrieben. Licht geht alle möglichen Wege. Nun schauen wir uns zunächst an, was passiert, wenn Licht auf dem geraden Weg auf den Schirm trifft. Dazu teilen wir eine Welle in sechs gleich große Segmente und betrachten die sechs entstehenden Teilwellen.

Für den geraden Weg sehen wir, dass es keinen Gangunterschied zwischen den Teilwellen gibt. Alle Vektoren zeigen in die gleiche Richtung. Nun beobachten wir den roten Punkt auf dem Schirm. Dort interferieren die sechs Teilwellen. Wir können daher die sechs Zeiger addieren, erhalten die Wurzel aus der Intensität I_S , quadrieren diese und bekommen den Wert für die Lichtintensität an diesem Ort, der das Maximum darstellt. Danach betrachten wir den Punkt, an dem eines der beiden ersten Minima liegt. Welchen Gangunterschied Δ haben die sechs Teilwellen an diesem Ort? Nach Addition der sechs Vektoren sehen wir, dass die Vektorsumme Null ist. Die Phasendifferenz zwischen zwei aufeinander folgenden Teilwellen beträgt 60° . Daraus ergibt sich, dass die gesamte Phasenverschiebung $\Phi = 6 \times 60 = 360$ bzw. 2π ist. Die Phasen der sechs Zeiger drehen sich je nach Gangunterschied Δ immer weiter im Kreis. Das erste Nebenmaximum ist erreicht, wenn sich der Gangunterschied um eine weitere halbe Wellenlänge auf $\Delta = 3/2\lambda$ erhöht hat. Nach der Öffnung des zweiten Spalts zeigt sich, dass der Gangunterschied zwischen den einzelnen Teilwellen beim zentralen Maximum wieder Null ist. Verfolgen wir den roten Punkt weiter, liegt beim Doppelspalt das erste Minimum sehr viel näher als beim Einfachspalt. Der Gangunterschied Δ zwischen beiden Spalten spielt nun eine entscheidende Rolle. Am ersten Minimum beträgt der Gangunterschied eine halbe Wellenlänge. Anhand der Vektorsumme sehen wir, dass die Teilwellen des 1. Spalts und die Teilwellen des 2. Spalts sich gegenseitig genau auslöschen. Entspricht der Gangunterschied Δ zwischen den beiden Spalten genau der Wellenlänge λ , zeigt uns die Vektorsumme aus den Zeigern, dass sich die Teilwellen gegenseitig zum ersten Nebenmaximum verstärken. Insgesamt lässt sich also die gemessene Intensitätsverteilung anhand der Vektorsummen im Wellenbild gut erklären.

1.6.4. Einfach- und Doppelspalt mit einzelnen Photonen [Link zu U1-6-04](#)

Jedes auf den Schirm treffende Photon wird mit einem Ball gezählt, der an der entsprechenden Trefferposition am Schirm herunterfällt, und in einer Röhre aufgefangen wird. Obwohl die einzelnen Treffer rein zufällig an den einzelnen Positionen auftreten, ergibt sich nach und nach eine Ballverteilung, die ein Muster erkennen lässt. Dieses Muster entspricht der Intensitätsverteilung der Photonen auf dem Schirm. Beim

Doppelspalt wählen wir ebenfalls eine kleine Anzahl der Photonen, die auf dem Schirm auftreffen. Auch hier entspricht die Verteilung der Bälle der Intensitätsverteilung. Im Vergleich zum Einfachspalt haben wir nur die halbe Anzahl Photonen betrachtet, damit das Verteilungsmaximum in der Mitte des Schirms am Einfach und Doppelspalt gleich hoch ist.

1.6.5. Wahrscheinlichkeitsverteilung [Link zu U1-6-05](#)

Das Auftreffen eines Photons auf dem Schirm wird vom Zufall bestimmt. Betrachten wir zum Beispiel die rote Röhre, in der 6 von 150 Bällen gelandet sind. Die Trefferwahrscheinlichkeit $P(x)$ in dieser Röhre ist $6/150 = 4$ Prozent. Die Trefferposition x des Photons können wir nur mit einer Genauigkeit δx bestimmen, die der Breite der einzelnen Röhren entspricht. Für einen beliebigen Punkt x innerhalb der Röhre bedeutet das, dass wir nur eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) = P(x)/\delta x$ angeben können. An einem beliebigen Ort x ist die Anzahl von Bällen gleich N_S mal $P(x)$. Die Ballverteilung in den Röhren ist also ein Abbild der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$ jedes einzelnen Balls. Da die Ballverteilung proportional zur Intensitätsverteilung ist, ergibt sich, dass $I(x)\delta x$ proportional zu $N\rho(x)\delta x$ gleich $NP(x)$ ist -sowohl für den Einzelspalt S als auch den Doppelspalt D. Wenn wir die beiden Kurven vom Einfach- und Doppelspalt, die sich aus der Ballverteilung ergeben, übereinanderlegen, dann erkennen wir deutlich, dass durch Öffnen des zweiten Spalts zusätzliche Minima im Beugungsbild des Einfachspalts entstehen. Wie kommen wir nun von der Intensitätsverteilung $I(x)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ eines einzelnen Photons? Da $I(x)$ proportional zu $\rho(x)$ ist, müssen wir lediglich skalieren. Das heißt, die Skala der y-Achse ändert sich; die Form der Kurven aber nicht. Da wir am Doppelspalt nur $N/2$ Photonen betrachtet haben verdoppelt sich mit der Skalierung die entsprechende Kurve auf der y Achse. Die Flächen unterhalb der Kurven entsprechen sowohl beim Einfach- als auch beim Doppelspalt der Gesamtwahrscheinlichkeit 100 Prozent, denn das Photon wird mit Sicherheit an irgendeinem Punkt auf dem Schirm auftreffen.

1.6.6. Welleninterferenz und Teilchenwahrscheinlichkeit [Link zu U1-6-06](#)

Auf dem Weg zum Herzen der Quantenmechanik vergleichen wir nun das Wellen- mit dem Teilchenbild von Licht. Für kontinuierliches Laserlicht haben wir anhand des Wellenbildes die Zeiger von Teilwellen addiert und damit das Interferenzmuster von Licht auf einem Schirm erklären können. Das Interferenzmuster, das der Intensitätsverteilung des Lichts entspricht, können wir durch das Betragsquadrat der elektromagnetischen Welle berechnen.

Im Vergleich dazu ist bei einzelnen Photonen die Intensität $I(x)$ auf dem Schirm proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ multipliziert mit der Anzahl N Photonen. Wir kombinieren die Gleichung $I(x) = N\rho(x)$ mit der Gleichung $I(x) = |\sqrt{I(x)}|^2$. Durch diese Kombination gewinnen wir eine ungewohnte, neue Größe: Das

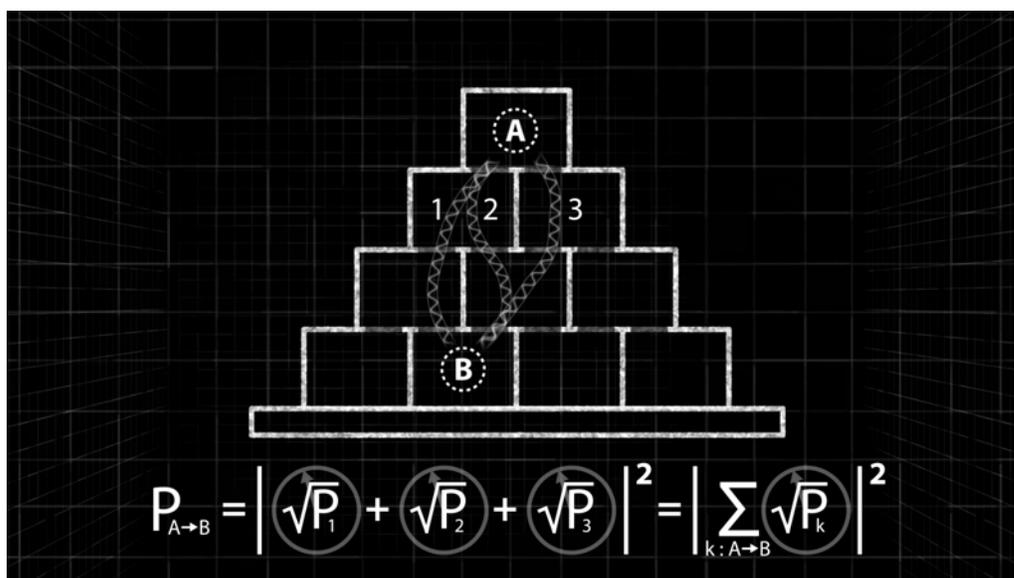


Figure 7. Visualisierung der Idee des Pfadintegrals: Jedem Weg wird eine interferenzfähige Amplitude zugeordnet. Das Betragsquadrat ergibt die Beobachtungswahrscheinlichkeit. Vergleich U1-01 für den "klassischen" Fall im Dalton-Brett.

Betragsquadrat aus der Wurzel der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$, multipliziert mit der Anzahl N Photonen.

Was lässt sich aus dieser Quadratur des Kreises folgern? Dafür schauen wir uns ein einziges Photon an, setzen also $N = 1$. Für das einzelne Photon lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ dann ähnlich wie die Intensitätsverteilung einer Welle berechnen: als drehendes Rad mit einer Umdrehungsfrequenz, einer Amplitude und einer Phase.

Damit haben wir eine fundamentale, neue Beschreibung von Licht gefunden: Eine Wahrscheinlichkeitswelle, symbolisiert durch ein drehendes Rad. Der Radius dieses Rades beziehungsweise der Betrag des Zeigers entspricht der Wurzel aus der Wahrscheinlichkeitsdichte. Das Besondere an dem Zeiger ist, dass er durch die Phase sowohl positiv als auch negativ sein kann. Allerdings können wir die Phase nicht direkt beobachten. Wir können die Phase nur indirekt an den Auswirkungen im Interferenzmuster erkennen, wenn der Gangunterschied Δ zwischen verschiedenen Wellen zu Phasendifferenzen führt.

Diese "Wurzelwahrscheinlichkeit" mit einer unsichtbaren Phase wird in der Quantenmechanik als Wellenfunktion Ψ bezeichnet. Mathematisch hängen die Beobachtungswahrscheinlichkeit $P(x)$, die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ und die Wellenfunktion $\Psi(x)$ wie folgt zusammen: $|\Psi(x)|^2 dx$ ergibt die Wahrscheinlichkeit, das Photon im Bereich von x bis $x + \delta x$ zu detektieren. Das drehende Rad symbolisiert eine nicht direkt beobachtbare Schwingung in der Quantendimension und ist damit das Herz der Quantenmechanik.

1.7. Wege in die Quantendimension – Das Pfadintegral

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den möglichen Wegen eines Photons und komplex erweiterten, interferenzfähigen Wahrscheinlichkeiten? Was besagt der Pfadintegral-Ansatz von Richard Feynman?

1.7.1. Am Rad drehen [Link zu U1-7-01](#)

Bei klassischen Wahrscheinlichkeiten gibt es bei Addition immer nur positive Werte. Ein drehendes Rad hingegen schwankt zwischen positiven und negativen Werten. Anhand des drehenden Rades können bei der quantenmechanischen Darstellung von Licht zwei Prinzipien miteinander kombiniert werden: Wahrscheinlichkeit und Interferenz.

Das drehende Rad, dessen Radius die Wurzel aus der Beobachtungswahrscheinlichkeit ist, bleibt für uns in einem Raum verborgen, der sich und nur indirekt über digitale Messdaten und einer faszinierenden mathematischen Beschreibung erschließen wird. Es handelt sich um den Hilbertraum, den wir die Quantendimension nennen.

1.7.2. Der Laserstrahl im leeren Raum [Link zu U1-7-02](#)

Am Punkt A steht ein Laser, der sich wie bei einem Leuchtturm um eine Achse dreht und einen Strahl aussendet. Stellen wir uns einen Punkt B im Raum vor. Auf welchem Weg gelangt das Laserlicht von A nach B?

1.7.3. Wege und Wahrscheinlichkeiten in der Quantendimension [Link zu U1-7-03](#)

Erinnern wir uns an die Stufenpyramide und die möglichen Wege, die ein klassisches Teilchen von A nach B zurücklegen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen auf einem der drei Wege in die Box B fällt, berechnet sich als Summe über die Einzelwahrscheinlichkeiten für alle Wege in diese Box. Bei unserem Laserlicht handelt es sich aber nicht um klassische, sondern um quantenmechanische Teilchen. Das heißt, wir müssen die Beobachtungswahrscheinlichkeit $P(x)$ komplex erweitern zu einer interferenzfähigen Wahrscheinlichkeit, um eine Aussage über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Lichtquants treffen zu können. Wie machen wir das? Wir ordnen jedem Weg ein drehendes Rad zu, denn ein drehendes Rad beschreibt eine interferenzfähige Wahrscheinlichkeit. Damit können wir eine Vektorsumme über die Wurzelwahrscheinlichkeiten für alle möglichen Wege nach B bilden. Wir addieren also die Zeiger der drehenden Räder und erhalten so die Amplitude in der Box B. Das Betragsquadrat dieser Amplitude entspricht der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des interferenzfähigen Teilchens in der Box B. Richard P. Feynman entwickelte mit diesem sogenannten Pfadintegral-Formalismus eine wichtige theoretische Säule der Quantenmechanik.

1.7.4. Die Cornu-Spirale [Link zu U1-7-04](#)

Wenn das Photon von A durch einen leeren Raum geschickt wird und bei B ankommt, wissen wir nicht, auf welchem Weg es nach B gelangt ist. Wir können aber ermitteln, ob es für bestimmte Wege eine höhere Wahrscheinlichkeit gibt. Dazu schauen wir uns eine Auswahl von 11 möglichen Wegen an. Es wird deutlich, dass die Wege vom direkten, geraden Weg in der Mitte nach außen hin länger werden. Demzufolge verschiebt sich die Phase von der Mitte nach außen immer weiter.

Wir erhalten durch die Vektorsumme über alle Zeiger die sogenannte Cornu-Spirale. Der resultierende rote Zeiger entspricht der Amplitude für den Übergang von Punkt A zu Punkt B. Das Betragsquadrat aus dieser Amplitude ergibt dann das Betragsquadrat für die Wahrscheinlichkeit, das Photon am Punkt B zu detektieren, wenn es von Punkt A in Richtung B angeschickt wurde. Anhand unserer 11 Zeiger sehen wir, dass der direkte, gerade Weg und die direkt angrenzenden Pfade am meisten zum resultierenden roten Zeiger beitragen. Die Beiträge der anderen Wege löschen sich gegenseitig aus. Mit Hilfe der Cornu-Spirale können auch alle weiteren Interferenzmuster darstellen, die Photonen erzeugen können. Steht zum Beispiel ein Einfach- oder Doppelspalt als Streuzentrum im Raum, wird ein Teil der möglichen Wege zwischen Punkt A und Punkt B abgeschnitten. So werden plötzlich andere Beiträge aus der Cornu-Spirale relevant, die sich dann nicht mehr gegenseitig aufheben.

1.7.5. Das Michelson Interferometer [Link zu U1-7-05](#)

Neben dem Einfach- und Doppelspalt gibt es in der Physik eine Reihe von weiteren wichtigen Interferenzexperimenten. Hier zeigen wir ein Interferenzmuster das durch das Michelson Interferometer erzeugt wird. Wir führen das Experiment zu Demonstrationszwecken zwar mit kontinuierlichem Laserlicht durch, erklären es aber aus der Perspektive einzelner Photonen. Halten wir Hände an verschiedenen Stellen in das Laserlicht, werden Wege versperrt und wir können die Veränderung am Interferenzmuster erkennen. Sperren wir Weg A und Weg B, kommt kein Licht am Schirm an. Sperren wir entweder nur Weg A, oder nur Weg B, kommt zwar Licht am Schirm an, aber es erscheint kein Interferenzmuster mehr.

Da wir zum Unterbinden eines Lichtweges eine Hand in den Strahl gehalten haben blitzt in der Großaufnahme hin und wieder ein Interferenzmuster auf. Das entsteht durch die kleine Lücke zwischen den Fingern, durch die wieder eine Photonenwelle durch Weg A laufen kann, die dann mit der Welle von Weg B interferiert.

Hier zeigen wir ein Interferenzmuster, das durch das sogenannte Michelson-Interferometer erzeugt wird.

Laserlicht trifft auf einen Strahlteiler. Ehe die Photonen auf den Beobachtungsschirm treffen, durchlaufen sie über die Spiegel A und B nun zwei mögliche Wege. Je nach Unterschied der Weglängen bzw. dem Gangunterschied zwischen beiden Wegen entstehen auf dem Schirm Beugungsminima und Maxima, die wir als Interferenzringe wahrnehmen.

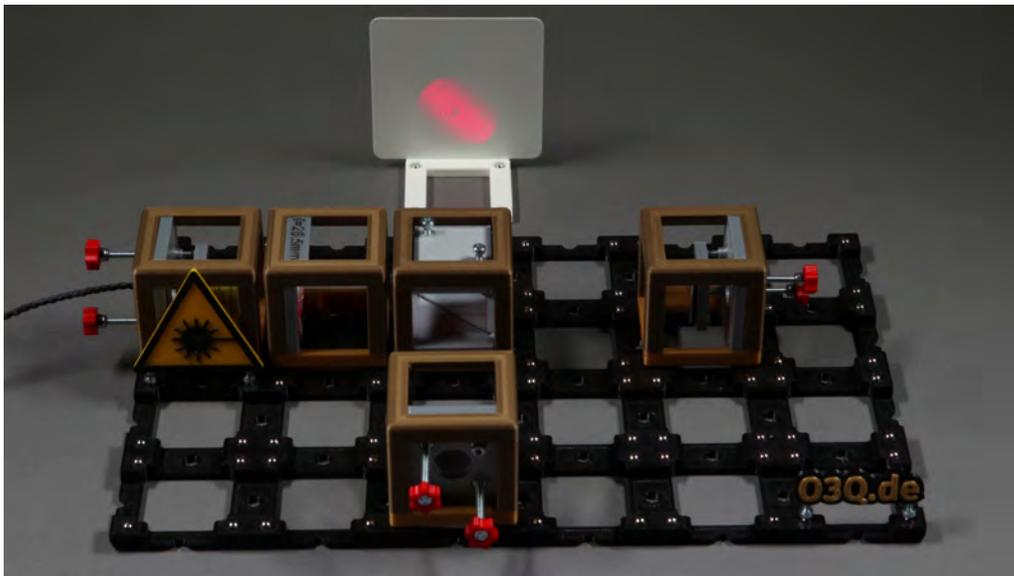


Figure 8. Das 3D-gedruckte [Michelson-Interferometer](#) als Low-Cost Experiment.

Sperren wir Weg A und Weg B mit der Hand ab, kommt kein Licht am Schirm an. Sperren wir entweder nur Weg A oder nur Weg B, kommt das Licht nur über den verbleibenden Weg am Schirm an, und das Interferenzmuster verschwindet. Da wir zum Unterbinden des einen Lichtweges eine Hand in den Strahl gehalten haben, blitzt in der Großaufnahme hin und wieder ein Interferenzmuster auf, wenn zwischen den Fingern eine kleine Lücke verbleibt, und doch beide Wege beitragen können.

1.8. Polarisation von Licht – Von Schwingungsknoten und -bäuchen (U1-08)

Wie lässt sich die Polarisation einzelner Photonen in der Quantendimension beschreiben? Welche Rolle spielt dabei der Winkel zwischen Polarisationsrichtung und Messachse? Wie kann das Gesetz von Malus für "klassische Lichtwellen" auf einzelne Lichtquanten verallgemeinert werden?

1.8.1. Polarisation [Link zu U1-8-01](#)

In dieser Station beschäftigen wir uns mit den theoretischen und experimentellen Eigenschaften von linear polarisiertem Licht.

1.8.2. Polarisationsfilter-Experiment [Link zu U1-8-02](#)

In diesem Experiment beobachten wir Licht durch zwei Polarisationsfilter. Der erste Filter gibt eine Richtungsachse vor und lässt nur das Licht durch, das entsprechend der Achse polarisiert ist.

Stellen wir einen zweiten Filter dazu, dessen Polarisationsachse mit der des ersten Filters übereinstimmt, ändert sich die Lichtintensität nicht. Verändern wir den Winkel

des zweiten Filters, sehen wir, dass die Lichtintensität abnimmt, je weiter sich der Winkel auf 90° zu bewegt. Es kommt fast kein Licht mehr durch. Die Lichtintensität nimmt wieder zu, je weiter der Winkel in Richtung 180° gedreht wird. Dann stehen die Filter wieder parallel zueinander. Die Abhängigkeit der Intensität vom Winkel wird als Intensitätsverteilung bezeichnet. Im Bild ist die Intensitätsverteilung als rotes Oval zu sehen, deren Maximum sich in vertikaler und deren Minimum sich in horizontaler Richtung befindet.

1.8.3. *Polarisationsfilter und Polarisationsdreher* [Link zu U1-8-03](#)

Zwei Polarisationsfilter stehen hintereinander im Raum. Der Winkel α zwischen den Filtern lässt sich frei drehen.

Anhand eines drehenden Rades beschreiben wir linear polarisiertes, monochromatisches Licht als eine kontinuierliche Lichtwelle. Die Polarisationsrichtung kann auf der Ebene frei gedreht werden. Was passiert nun, wenn wir den Winkel α der zweiten Filterachse verändern? Der zweite Filter lässt nur den Anteil des Feldvektors durch, der parallel zu seiner Achse ist. Steht die Polarisationsrichtung der einfallenden Lichtwelle senkrecht auf der Filterachse, ist der Anteil des Feldvektors genau Null. Es gibt zwei verschiedene Typen von Polarisatoren: Polarisationsfilter und Polarisationsdreher. In beiden Fällen wird das Licht entlang der vorgegebenen Achse polarisiert. Im Gegensatz zum Filter verändert sich beim Polarisationsdreher die Amplitude der Lichtwelle nicht.

1.8.4. *Polarisation beim einzelnen Photon* [Link zu U1-8-04](#)

Das Verhalten einzelner Photonen wird vom Zufall bestimmt. Wie manifestiert sich dieser Zufall bei der Polarisationsmessung am einzelnen Photon?

Hinter dem Polarisationsdreher trifft das Photon auf einen polarisierenden Strahlteilerwürfel. Im jetzigen Aufbau teilt der polarisierende Strahlteiler die Photonenwelle gemäß ihrer Polarisation auf. Durch den Kristallaufbau des polarisierenden Strahlteilerwürfels sind eine horizontale und eine vertikale Achse vorgegeben. Ist das einfallende Photon entlang der vertikalen Achse polarisiert, besteht eine hundertprozentige Wahrscheinlichkeit, dass es transmittiert wird, und es trifft auf den Detektor "Weiß".

Wir drehen nun in 15° -Schritten die Polarisationsrichtung des einfallenden Photons aus der vertikalen Achse heraus. Es ergibt sich ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster mit immer mehr schwarzen und immer weniger weißen Messergebnissen. Ist das eintreffende Photon entlang der horizontalen Achse polarisiert, wird es mit hundertprozentiger Sicherheit reflektiert und trifft auf den Detektor "Schwarz".

1.8.5. *Wahrscheinlichkeitsverteilung* [Link zu U1-8-05](#)

Messen wir nur das Verhalten eines einzelnen Photons am polarisierenden Strahlteilerwürfel, erhalten wir lediglich eine Antwort darauf, ob das Photon transmittiert oder

reflektiert wird. Erst bei der Betrachtung vieler einzelner Messergebnisse können wir eine Aussage über die experimentell ermittelten Wahrscheinlichkeiten machen.

Dazu ordnen wir entsprechend der Winkelstellung des Polarisationsdrehers auf einem Kreissegment die Anzahl der gemessenen weißen und schwarzen Felder in einem Balken an. So erhalten wir optisch ein Maß für die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Transmission – "Weiß" - und Reflexion – "Schwarz"- in Abhängigkeit zum entsprechenden Winkel α . Die gesamte Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle Winkelstellungen (verdeutlicht durch die rote Oval-Linie) wird durch sehr viele Experimente quasi "abgescannt". Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Transmission ist proportional zur Intensitätsverteilung.

1.8.6. Wahrscheinlichkeit und Interferenz [Link zu U1-8-06](#)

Erinnern wir uns an die Hinführung zum "Herz der Quantenmechanik" in Station U1-06. Dort haben wir gesehen, dass sich das Verhalten von Photonen durch die Kombination aus Wahrscheinlichkeit und Interferenz beschreiben lässt. Rekapitulieren wir: Wahrscheinlichkeiten sind immer positive Zahlen, die auch durch Addition nicht negativ werden oder sich auslöschen können. Das Phänomen der Interferenz kann mit einer klassischen Wahrscheinlichkeit nicht beschrieben werden. Wir verlassen also die "klassische Dimension" und erweitern die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{Weiß})$ und $P(\text{Schwarz})$ um eine unsichtbare Schwingung in der Quantendimension, visualisiert durch jeweils ein drehendes Rad. Der Radius entspricht der Wurzel aus der Wahrscheinlichkeit $P(\text{Weiß})$ und $P(\text{Schwarz})$. Der drehende Zeiger entspricht der Phase. Das Besondere an dem Zeiger ist, dass er durch die Phase sowohl positiv als auch negativ sein kann. Das bedeutet, dass durch die Oszillation des Rades die Wahrscheinlichkeit interferenzfähig wird. Wir können es nicht beobachten, aber es ist wichtig, sich nochmals vor Augen zu führen: VOR der Messung – also vor der Wechselwirkung mit den Detektoren – ist nicht festgelegt, ob das Photon transmittiert oder reflektiert wird. Vor der Messung ist es unmöglich zu sagen, wo sich das Photon befindet, beide Möglichkeiten überlagern sich.

1.8.7. Polarisation eines Photons in der Quantendimension [Link zu U1-8-07](#)

Betrachten wir in unserem Koordinatensystem (grauer Kreis) noch einmal die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\text{Weiß})$ von α - rote ovale Linie. Wir ersetzen nun in jeder Winkelstellung die Wahrscheinlichkeiten für Transmission durch interferenzfähige Wahrscheinlichkeiten, symbolisiert durch drehende Räder. Damit erhalten wir eine Schwingung in der Quantendimension, die hier durch einen leuchtend weißen, oszillierenden Kreis dargestellt ist. Diese Schwingung hat eine Knotenlinie auf der Koordinatenlinie H und einen maximalen Ausschlag oder Schwingungsbauch an den Punkten, wo der Radius des zugehörigen drehenden Rades am größten ist. Die Polarisationsrichtung des vertikal polarisierten Photons entspricht dabei der Richtung V, in der sich der Schwingungsbauch der Photonenwelle befindet.

1.8.8. Zusammenfassung [Link zu U1-8-08](#)

Wir fassen die Resultate der Station U1-8 anhand unseres Quadranten-Schemas zusammen. Im ersten Quadranten wird das Experiment vorgestellt, bei dem gleichzeitig sehr viele Photonen gemessen werden. Es ergibt sich eine Intensitätsverteilung, die von der Winkeldifferenz zwischen zwei Polarisationsfiltern abhängt. Im zweiten Quadranten wird das Experiment beschrieben, bei dem einzelne Photonen hintereinander gemessen werden. Nach der Messung ist für ein einzelnes Photon eine Möglichkeit realisiert - Transmission oder Reflexion. Im dritten Quadranten widmen wir uns der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sich nach vielen Messungen ergibt. Viele Messungen ergeben ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster, das vom Winkel des Polarisationsdrehers abhängt. Wir erhalten so eine winkelabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die proportional zur Intensitätsverteilung ist. Im vierten Quadranten interpretieren wir die gemessene Wahrscheinlichkeitsverteilung für Schwarz und Weiß. Vor der Messung können wir nicht einfach den Möglichkeiten Transmission und Reflexion nur eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, wie es nach unseren Messergebnissen zunächst logisch erscheint. Dies liegt daran, dass Licht interferenzfähig ist, und klassische Wahrscheinlichkeiten diese Interferenzfähigkeit nicht beschreiben können. Was wir messen und als Wahrscheinlichkeiten für Schwarz und Weiß interpretieren, ist in der Quantendimension mehr. Es ist eine Überlagerung oder Superposition von Schwarz und Weiß. Diese Superposition wird durch Schwingungen beschrieben.

1.9. Korrelationsfunktion - Wie der Zufall es so will (U1-09)

Durch ein Analogieexperiment mit Münzen untersuchen wir Zufallsmuster von zwei Beobachtern (Alice und Bob) einer Münze. Welche Messergebnisse erhalten die beiden Beobachter? Was ergibt sich aus dem Vergleich der Messergebnisse von Alice und Bob?

1.9.1. Zwei Zufallsmuster [Link zu U1-9-01](#)

Während der Hausmeister und Alice in den nächsten Raum gehen, kommen sie an zwei Schachbrettern vorbei. Auf diesen flackernden Schachbrettern entstehen Schwarz-Weiß-Zufallsmuster. In dieser Station werden wir uns mit verschiedenen Schwarz-Weiß-Zufallsmustern eingehender beschäftigen. Wenn "Weiß" gemessen wurde, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für "Schwarz" oder für "Weiß" bei einer zweiten Messung?

1.9.2. Zwei Münzen, eine Münze [Link zu U1-9-02](#)

Alice wirft die eine Münze und Bob die andere. Die ersten drei Ergebnisse stimmen miteinander überein. Ist das purer Zufall? Oder besteht zwischen beiden Münzen eine geheimnisvolle Verbindung? Diese Frage können wir erst beantworten, wenn Alice und Bob viele Experimente gemacht haben. Nun variieren wir das Experiment und nehmen nur eine Münze mit einer schwarzen und einer weißen Seite. Alice und

Bob betrachten nun eine einzige Münze auf einem Glastisch aus zwei verschiedenen Perspektiven. Alice macht ihre Messung. Aufgrund ihres Ergebnisses kann sie sofort folgern, dass Bob schwarz messen wird, unabhängig davon, wann und wie weit entfernt von Alice Bob seine Messung machen wird. Nach 64 Würfeln erhalten beide ein Zufallsmuster. Jedes Zufallsmuster für sich genommen erscheint genauso zufällig wie im ersten Münzexperiment. Beim Vergleich der beiden Zufallsmuster sehen wir aber den Unterschied zum ersten Experiment mit zwei Münzen.

1.9.3. Korrelationsfunktion [Link zu U1-9-03](#)

Alices und Bob können ohne Austausch von ihren Messergebnissen nicht entscheiden, ob es einen bestimmten Zusammenhang zwischen ihren Zufallsmustern gibt, oder nicht. Dafür müssen sie ihre Messergebnisse miteinander vergleichen. Dafür zählen wir ab, wie oft die Messungen von Alice und Bob übereinstimmen und sich unterscheiden. Die Differenz zwischen der Anzahl übereinstimmender und unterschiedlicher Messergebnisse ist ein Maß dafür, ob und wie die Messungen etwas miteinander zu tun haben oder nicht. Man bezeichnet dies als die experimentell bestimmte Korrelationsfunktion C . Durch die Division mit der gesamten Zahl aller Messungen wird erreicht, dass der Wert für C immer zwischen -1 und $+1$ liegt. Vergleichen wir die beiden Zufallsmuster von einer Münze, werden alle Felder grau. Wir erhalten dann die Korrelation C gleich -1 . Die Korrelationsfunktion gibt an, wie abhängig die Zufallsmuster voneinander sind.

1.9.4. Theorie und Experiment [Link zu U1-9-04](#)

Vergleichen wir Theorie und Experiment für die beiden Münzexperimente. Es gibt vier mögliche Ergebnisse bei den Messungen. Jede der Kombinationen und hat eine bestimmte Wahrscheinlichkeit. Berechnen wir die Korrelationsfunktion für den Fall von zwei verschiedenen Münzen. $P(\text{Schwarz})$ gleich $P(\text{weiß})$ gleich ein $\frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit für 2 unabhängige Münzen ergeben sich als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Je größer die Anzahl N von Messungen ist, desto kleiner werden die Schwankungen um den theoretisch berechneten Erwartungswert. Wie wir bereits in Stationen U1-3 gesehen haben, mittelt sich der Zufall heraus, wenn die Anzahl N gegen unendlich geht. Aus unendlich viel Zufall wird somit Sicherheit. Der experimentelle Wert nähert sich dem theoretischen Wert immer genau an - allerdings nur dann, wenn die Theorie richtig ist. Das ist in diesem einfachen Beispiel natürlich der Fall.

1.10. Kombinierte Polarisationsmessung – Zur Metapher der zwei Türen (U1-10)

Zwei Türen, die Alice und Bob öffnen können oder nicht, entsprechen gemessenen Photonen-Paaren an polarisierenden Strahlteilerwürfeln. Wovon hängt ab, wann welches der

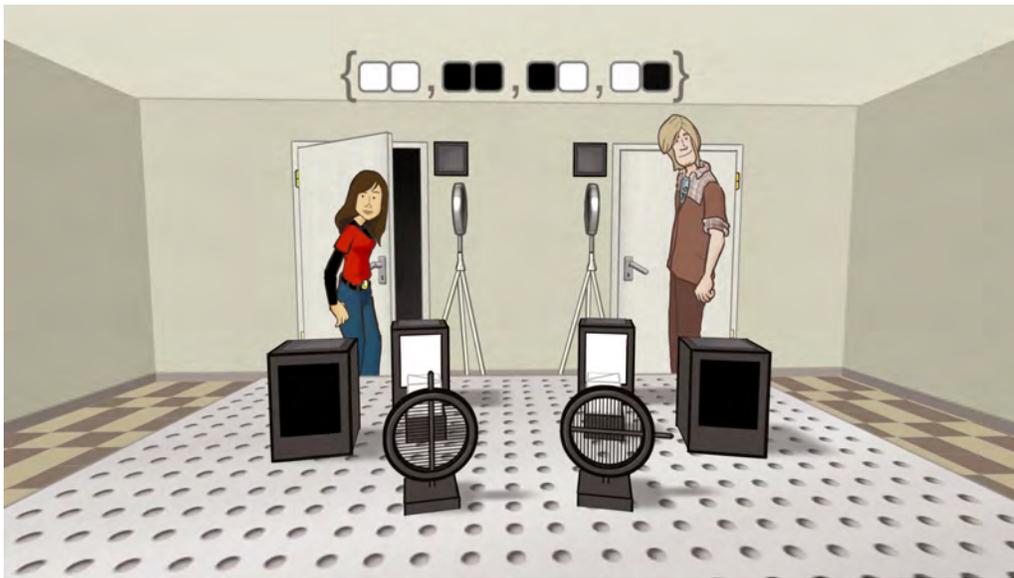


Figure 9. Die beiden Türen können jeweils offen oder geschlossen sein - was genau den vier möglichen Messergebnissen von Alice und Bob entspricht.

Mess-ergebnisse auftritt? Was steckt hinter diesen Messergebnissen?

1.10.1. Zwei-Türen-Metapher [Link zu U1-10-01](#)

Die beiden Türen zu Prof. Omegas Zimmer stehen miteinander in einem Zusammenhang. Der Zufall entscheidet darüber welche Tür nun gerade offen ist. Von den vier möglichen Türkombinationen sind während des Experiments nur zwei möglich. Das heißt, dass Alice und Bobs Türschlösser antikorreliert sind. Bei jeder Tür befindet sich jeweils ein Polarisationsfilter, deren Achsen zu Beginn des Experiments senkrecht zueinander stehen. Bob dreht nach einer Weile die Achse seines Polarisationsfilters um 90° , so dass beide Achsen parallel zueinander stehen. Dadurch verändert er die Korrelation zwischen den Türen. Was steckt hinter dieser Zwei-Türen Metapher? Warum verändert sich die Korrelation der Türen durch Drehen der Polarisationsachse?

1.10.2. Die Detektoren "Alice" und "Bob" [Link zu U1-10-02](#)

Die Zwei-Türen-Metapher versinnbildlicht ein wichtiges Quantenoptik-Experiment mit Paaren von Photonen. Die Polarisation der Photonenpaare wird im folgenden Versuchsaufbau gemessen. Links und Rechts jeweils von einem Polarisationsdreher, einem polarisierenden Strahlteilerwürfel und zwei Detektoren. Detektor "Weiß" für die Messung transmittierter Photonen – Tür offen – und Detektor "Schwarz" für die Messung reflektierter Photonen – Tür geschlossen. Die beiden linken Detektoren nennen wir "Alice", und die beiden rechten "Bob". Es hängt nun davon ab, wie die beiden Achsen der Polarisationsdreher zueinander stehen, was von den Detektoren "Alice" und "Bob" gemessen wird.

1.10.3. Korrelationsfunktion [Link zu U1-10-03](#)

Je nach Winkelstellung der Polarisationsdreher kann sich eine der vier Möglichkeiten $((\square, \square), (\blacksquare, \square), (\square, \blacksquare), (\blacksquare, \blacksquare))$ durch jede Messung realisieren. Dabei können Alice und Bob unabhängig voneinander die Messachse bestimmen, in der sie die horizontalen und vertikalen Komponenten der Polarisation an dem Strahlteilerwürfel messen. Nun bestimmen wir die Korrelationsfunktion zwischen den gemessenen Zufallsmustern von Alice und Bob. Bei paralleler Stellung sind die Messergebnisse identisch und damit total korreliert. Bei 45° sind die Messungen unkorreliert. Bei 90° sind sie antikorreliert.

1.11. Verschränkte Photonen – Vom Vorher und Nachher einer Messung (U1-11)

Was passiert mit der Schwingung Omega, wenn wir diese beobachten und messen wollen? Welche Schlussfolgerungen können wir ziehen, wenn wir experimentelle Resultate und theo-retische Überlegungen zur Schwingung Omega miteinander vergleichen?

1.11.1. Doppelbrechung [Link zu U1-11-01](#)

Die Doppelbrechung von Licht ist bereits seit dem 17. Jahrhundert bekannt und wurde beim Kalkspat entdeckt. Hier zeigen wir einen Kalkspatkristall, der auf einem Schachbrettmuster liegt. Wenn der Lichtstrahl auf den Kristall trifft, wird er in zwei senkrecht zueinander polarisierte Anteile gespalten, die dann als zwei Strahlbündel aus dem Kristall wieder austreten, und so für das doppelte Bild sorgen. Mit einem linearen Polarisationsfilter können wir die beiden Komponenten einzeln wahrnehmen. Hier ist der horizontal polarisierte Anteil zu erkennen. Drehen wir den Polarisationsfilter, ist nun der leicht versetzte vertikal polarisierte Anteil zu sehen.

1.11.2. "Fern- oder Nahschach": Omegas Schatten an der Wand [Link zu U1-11-02](#)

Alice und Bob wundern sich über die beiden Schachbretter bei Omega, die sich am Ende von Omegas Zimmer gegenüber den beiden Türen befinden. Die beiden Schachbretter stehen ähnlich wie die Türen für eine Metapher, die das Phänomen von verschränkten Photonen verdeutlichen soll. Die beiden Figuren Alice und Bob werden in dieser Metapher zu Detektoren von Photonenpaaren. Im Film startet Bob das Experiment mit einem Knopfdruck. Wir sehen ein Objekt in der Mitte des Raumes, das von den beiden Türen aus durch jeweils einen flackernden Scheinwerfer angestrahlt wird. So sehen Alice und Bob auf der gegenüberliegenden Wand zwei flackernde Schatten eines einzigen Objektes.

1.11.3. Experiment mit verschränkten Photonen [Link zu U1-11-03](#)

Hier sehen wir eine vereinfachte Darstellung des Versuchsaufbaus. BBO-Kristall, zwei Polarisationsdreher, zwei polarisierende Strahlteiler, zwei mal zwei Detektoren. Ziel des Experimentes ist es, Paare von Photonen so herzustellen, dass sie miteinander verschränkt werden können. Durch die frei wählbare Winkelstellung der Polarisationsdreher definieren Alice und Bob jeweils ihre "vertikale und "horizontale" Messachse. Der Kristall ist optisch doppelbrechend. Nach der Aussendung durch den Laser wandern sehr viele Photonen durch den BBO-Kristall, ohne in ein Photonenpaar geteilt zu werden. Nur weniger der hochenergetischen Photonen zerfallen in ein Photonenpaar von zwei Photonen von jeweils halber Energie und umgekehrter Polarisation. Die am Experiment teilnehmenden Paare verlassen den Kristall entlang der beiden roten Linien.

1.11.4. Die verschränkte Schwingung Omega [Link zu U1-11-04](#)

Hier sehen wir eine vereinfachte Darstellung des Versuchsaufbaus. Ziel des Experimentes ist es, Paare von Photonen so herzustellen, dass sie miteinander verschränkt werden können. BBO-Kristall: Der Kristall ist optisch doppelbrechend. Einige der ultravioletten Photonen zerfallen in diesem Kristall zu Paaren von zwei Photonen mit jeweils halber Energie und umgekehrter Polarisation. Zwei Polarisationsdreher, zwei polarisierende Strahlteiler, zwei mal zwei Detektoren. Durch die frei wählbare Winkelstellung der Polarisationsdreher definieren Alice und Bob jeweils ihre "vertikale" und "horizontale" Messachse. Nach der Aussendung durch den Laser wandern sehr viele Photonen durch den BBO-Kristall, ohne in ein Photonenpaar geteilt zu werden. Nur weniger der hochenergetischen Photonen zerfallen in ein Photonenpaar. Die am Experiment teilnehmenden Paare verlassen den Kristall entlang der beiden roten Linien.

1.11.5. Die rotierende Münze [Link zu U1-11-05](#)

Wie können wir die verschränkte Schwingung $|\Omega\rangle$ beschreiben? Wir vergleichen sie mit einer Münze, die sowohl aus Alice als auch aus Bobs Perspektive betrachtet wird. Beide Möglichkeiten sind gleich wahrscheinlich. In der Quantendimension überlagern sich beide Möglichkeiten. Das Messergebnis ist vor der Messung nicht definiert. Entweder sieht Alice das Photon R vom "oberen Kegel" und Bob das Photon L vom "unteren Kegel", oder es ist genau umgekehrt. Quantenmechanisch ausgedrückt überlagern sich die Möglichkeiten zu einer Schwingung Omega. Die Wahrscheinlichkeit $P = 1/2$ wird dabei als interferenzfähige Wahrscheinlichkeit zu einem drehenden Rad mit Radius $\sqrt{1/2}$ erweitert. Da Alice und Bob eine einzige rotierende Münze aus verschiedenen Perspektiven beobachten, beeinflusst Alices Messung an dieser Münze sofort das mögliche Messergebnis von Bob, da die Messung die Überlagerung beider Möglichkeiten zerstört. Dabei spielt es keine Rolle, unabhängig davon, wie weit Alice und Bob voneinander entfernt sind.

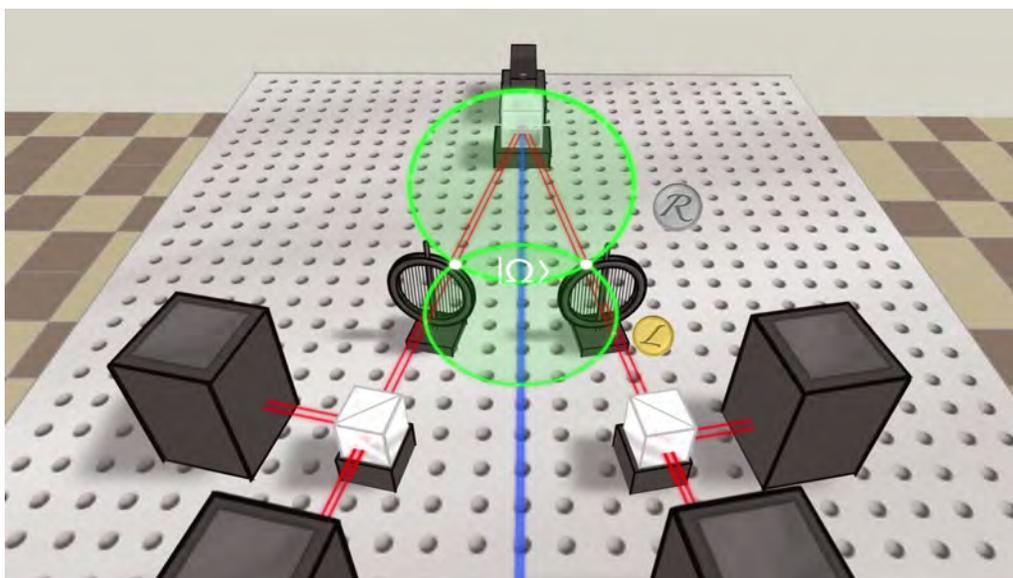


Figure 10. Das Experiment zur Erzeugung polarisationsverschränkter Photonen

1.11.6. Der "Omega-Donut" in der Quantendimension [Link zu U1-11-06](#)

Ähnlich wie beim linear polarisierten Photon aus Station U1-08 ersetzen wir die Wahrscheinlichkeit $1/2$ in jeder Winkelstellung durch drehende Räder mit dem Radius $\sqrt{1/2}$, die auf einer Kreisachse zwischen $+\sqrt{1/2}$ und $-\sqrt{1/2}$ oszillieren. Optisch beschreibt der schwingende 3D-Kreis die Form eines symmetrisch gebackenen Donuts. Beim Omega-Donut haben alle Vektoren die gleiche Länge $\sqrt{1/2}$. Wir zerlegen im nächsten Schritt den Omega-Donut so, dass wir die Messachsen "horizontal" und "vertikal" als Koordinatensystem einführen können. Also führen wir eine Basistransformation von der Basis R, L in die Basis H, V durch. In einer vereinfachten Notation stellen wir hier nur die Richtung des Schwingungsbauches dar. Da Omega rotationssymmetrisch ist, kann das V/H -Koordinatensystem beliebig gedreht werden. Die Doppelpfeilachsen zeigen dabei die Richtungen des Schwingungsbauches an. Es handelt sich hierbei wieder um eine Basistransformation. Die Richtung des Schwingungsbauches wird dann mit V -Hut und H -Hut gekennzeichnet.

1.11.7. Visualisierung des Messprozesses [Link zu U1-11-07](#)

Die rotationssymmetrische Schwingung Omega wirft bei "Projektion" aus der Quantendimension in die dreidimensionale Welt zwei "Schatten", die Alice und Bob bei ihrer Messung als Wahrscheinlichkeitsverteilung für Transmission (weißer Ring) und Reflexion (schwarzer Ring) in jeder Winkelstellung des Polarisationsdrehers wahrnehmen. Bei der Abbildung des drehenden Rades auf die Wahrscheinlichkeit geht die Phase als Dimension verloren. Nun betrachten wir den Messprozess von Alice und Bob genauer und konzentrieren und zunächst auf die Perspektive von Alice.

Wir interessieren uns dafür, welche Auswirkung Alice Messung auf Bobs Messung hat. Alice wählt zunächst ihre horizontale und vertikale Messachse durch eine von ihr bestimmte Winkelstellung des Polarisationsdrehers. Die Winkelstellung von Bobs Polarisationsdreher ist für die folgende Diskussion vorerst unerheblich. Das verschränkte Photonenpaar Omega tritt durch die Messung in der von Alice gewählten Messachse in Wechselwirkung mit den Detektoren "Weiß" und "Schwarz". Vor der Messung ist Omega aus Alices Perspektive eine Überlagerung von zwei vertikal und zwei horizontal polarisierten Photonen (vgl. die rot/braunen Doppelpfeilpaare). Für das Ergebnis "Weiß" oder "Schwarz" gibt es jeweils die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Vor der Messung steht das Ergebnis noch nicht fest – beide Möglichkeiten überlagern sich zu einer gemeinsamen Schwingung. Misst Alice "Weiß" gleich Transmission heisst das, dass sich das Photon in Bezug auf Alice Messachse als vertikal polarisiert gezeigt hat. Bei "Schwarz" gleich Reflektion war das Photon horizontal polarisiert. Anders ausgedrückt: Die Messung ist quasi die Projektion des Photons entweder auf die vertikale oder die horizontale Komponente. Alice misst wieder – und ihr Detektor "Schwarz" (■) registriert ein Photon.

1. Das gemessenes Photon war horizontal polarisiert.
2. Der vertikale Anteil des Photonenpaars ist zerstört.
3. Das übriggebliebene Photon des Photonenpaars hat die gleiche horizontale Polarisationsrichtung wie das Photon von Alice
4. Bobs ovalförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt nun die Beobachtungswahrscheinlichkeit eines horizontal polarisieren Photons.

Alice Wahl der Messachse hat gemäß der Quantenmechanik unmittelbar und ohne zeitliche Verzögerung Einfluss auf Bobs mögliches Messergebnis. Alice kann nicht beeinflussen, ob sie das Ergebnis Schwarz oder Weiß erhält. Nach der Messung kann Alice aber mit Sicherheit sagen, wie Bobs Photon polarisiert sein wird. Doch ob Bob Schwarz oder Weiß misst, kann sie erst durch Vergleichen der Messergebnisse feststellen, da Bob seine Messachse ebenfalls frei wählen kann.

1.11.8. Berechnung der Korrelationsfunktion [Link zu U1-11-08](#)

Ohne Austausch über ihre Messdaten können Alice und Bob nicht mit absoluter Sicherheit sagen, ob ihre Ergebnisse korreliert sind oder nicht. Allerdings lässt sich auf Basis der Grundannahme, dass Alice und Bob eine Schwingung Omega beobachten, die Korrelationsfunktion quantenmechanisch berechnen. Wir können vor einer Messung von vier kombinierten Wahrscheinlichkeiten ausgehen: ((□, □), (■, □), (□, ■), (■, ■)). Die obere Bilderzeile bezieht sich auf Alices weißes Messergebnis, die untere auf Alices schwarzes Messergebnis. Oben rechts sehen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung P(Weiß, Weiß) - weißes Oval- und implizit auch P(Weiß, Schwarz) - schwarze Sichel - von Bob. Unten rechts sehen ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung P(Schwarz, Weiß) - weißes Oval- und implizit auch P(Schwarz, Schwarz) - schwarze Sichel von Bob dargestellt. Desweiteren ist zu berücksichtigen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung

für Bobs Photon von der Differenz der Winkel ($\beta - \alpha$) aus seiner und Alices Messachse abhängt. Beträgt zum Beispiel die Winkeldifferenz null, dann liegt für Alice Messung "Weiß" die Wahrscheinlichkeit für P(Weiß, Weiß) bei 100 Prozent. Wir sehen nun zwei Kurven für Bobs Wahrscheinlichkeitsverteilung in Abhängigkeit der Winkeldifferenz für übereinstimmende Messergebnisse, und einmal für unterschiedliche Messergebnisse. Bilden wir die Differenz zwischen beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen, erhalten wir die theoretische berechnete Korrelationsfunktion C .

1.11.9. Alices und Bobs Messreihen [Link zu U1-11-09](#)

Alice und Bob wählen zunächst übereinstimmende Messachsen, das heißt die Winkel α und β der beiden Polarisationsdreher betragen 0° . Während Alice ihre Messachse nicht verändert, dreht Bob seine Polarisationsrichtung in 15° Schritten bis 90° weiter. Zu jeder Winkelkombination werden 64 Messungen durchgeführt und als Schwarz-Weiß-Zufallsmuster aufgezeichnet.

1.11.10. Messung der Korrelationsfunktion [Link zu U1-11-10](#)

Alice und Bob können erst durch den Vergleich ihrer Zufallsmuster die Korrelation ihrer experimentell ermittelten Messdaten als Funktion der Winkeldifferenz ($\beta - \alpha$) bestimmen. Dazu überlagern wir die entsprechenden Zufallsmuster, zählen für jede Winkeldifferenz die Kombination Weiß-Weiß plus Schwarz-Schwarz und ziehen davon die Anzahl der grauen Kästchen ab. Wie viele Messergebnisse von Alice und Bob übereinstimmen, hängt von der Differenz der Winkel der beiden Polarisationsdreher ab. Wir erhalten für identische Winkel totale Korrelation und für die Winkeldifferenz 90° totale Antikorrelation. Für 45° sind die Messergebnisse unkorreliert. Vergleichen wir die experimentell ermittelte Korrelation (weiße Punkte) mit der theoretischen Vorhersage der Quantenmechanik (rote Kurve), ergeben sich nach 64 Messungen zwar noch kleine Abweichungen, aber insgesamt erkennen wir bereits eine gute Übereinstimmung. Im tatsächlichen Experiment werden ca. 100.000 Photonen pro Sekunde gemessen. Theorie und Experiment stimmen dann überein und stellen beide die Korrelationsfunktion von $|\Omega\rangle$ dar. Die Korrelationsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen Alice und Bobs Messergebnissen. Hierbei zeigt sich der Unterschied zwischen Korrelation und Information: Information visualisieren wir als Schachbretter, Korrelation als Übereinanderlegen der Schachbretter. Korrelation wird unmittelbar, ohne Zeitverzug bei Alice und Bob durch die Messung erzeugt. Für das experimentelle Feststellen der Korrelation müssen Alice und Bob aber die digitale Information über ihre Messdaten austauschen. Dies ist nur mit Zeitverzug und nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit möglich. Können wir die Korrelation in der Quantendimension in der Zukunft technisch nutzen?

1.11.11. Schattenwelt und Quantendimension [Link zu U1-11-11](#)

Die Vorstellung, dass digitale Daten auf einem "Meer von Schwingungen", quasi auf der Oberfläche der Quantendimension schwimmen, hat weitreichende Konsequenzen. Einerseits ergibt sich dadurch, dass zumindest im Prinzip jede Information mit jeder anderen unsichtbar in Verbindung stehen kann. Diese Korrelationen existieren, auch wenn uns die Kenntnis darüber fehlt. Im Mikrokosmos scheint die Welt nicht kleiner, sondern größer, multidimensional zu werden, allerdings auf Kosten der Beobachtbarkeit: Andererseits kann die Kenntnis dieser Korrelationen neue technologische Wege in der Quantenkommunikation ermöglichen, z. B. in der Quantenkryptographie.

1.12. Bellsche Ungleichung (U1-12)

Lässt sich die Korrelationsfunktion von Alices und Bobs Messungen der Polarisation ohne Quantendimension erklären oder nicht? Gibt es Einsteins "spukhafte Fernwirkung" oder nicht? Was beweist dabei die Bellsche Ungleichung? Welche experimentellen Befunde be- oder widerlegen die Existenz der Quantendimension?

1.12.1. "Vielleicht wurde er ermordet" [Link zu U1-12-01](#)

Omega ermordet? Es gibt gar keine Schwingung in der Quantendimension? Die Vorstellung, dass Alice und Bob an Kilometer weit voneinander entfernten Orten durch Omega miteinander in Verbindung stehen, wurde von Albert Einstein 1935 in Zweifel gezogen. Er machte dazu eines seiner berühmten Gedankenexperimente und veröffentlichte seine Zweifel unter dem Namen EPR-Paradoxon. Die geheimnisvolle Verbindung zwischen Alice und Bob bezeichnete Einstein als "spukhafte Fernwirkung" und war davon überzeugt, dass die quantenmechanische Theorie, die die Verbindung vorhersagte, unvollständig sein müsse und in Zukunft durch eine bessere Theorie ersetzt werden würde. Damals konnten Einsteins Überlegungen noch nicht experimentell überprüft werden. Inzwischen gibt es Experimente zu dem Jahrzehnte alten Gedankenexperiment. Die modernen Messergebnisse mit verschränkten Photonen zeigen, dass die theoretische Vorhersage der Quantenmechanik stimmen müsste. Hatte sich Einstein also damals geirrt? Oder gibt es doch eine alternative Erklärung, die ohne die unmittelbare Interferenz von Messergebnissen über beliebige Entfernungen auskommt?

1.12.2. *Experimentelle Bestimmung der Korrelationsfunktion oder ein "Quantchen Trost"* [Link zu U1-12-02](#)

Starten wir mit der Suche nach einer alternativen Erklärung bei der experimentellen Bestimmung der Korrelationsfunktion. Alice und Bob haben mit ihren Polarisationsdrehern jeweils einen Winkel und damit ihre Messachse gewählt. Lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf eine einzelne Messung von Alice und Bob. Wie Photonen wirklich aussehen, wissen weder Alice noch Bob noch sonst ein Mensch. Was wir oder unsere technischen Hilfsmittel wahrnehmen, sind nur indirekte Botschaften der Photonen, die

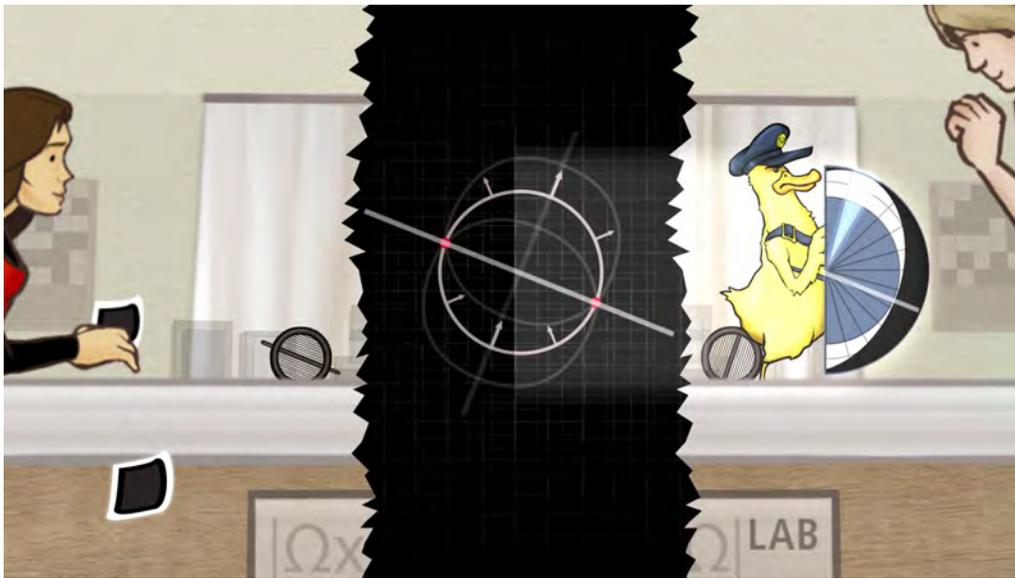


Figure 11. Stehen Alice und Bob wirklich über die Quantendimension miteinander in Verbindung?

uns von verschiedenen "Postboten" übermittelt werden. Der Absender bleibt verborgen und unsichtbar. Wir stellen uns als Postboten aus der Quantendimension eine "Quanten-Ente" vor, das Quentchen. Jeder andere Bote würde genau so viel oder wenig mit dem Absender zu tun haben wie das Quentchen. Ein Briefträger bringt auch nur die Post dahin, wo sie hin soll, ist aber für den Inhalt der Post zuständig. Alice macht nun ihre Messung. Entsprechend ihrer Messachse kann sie nur in eine einzige Winkeltasche α des Quentchens greifen. Mit dem Griff in die Tasche verpufft das Quentchen sofort. Nur eine schwarze oder eine weiße Karte in Alices Hand bleibt als Symbol für Transmission oder Reflexion übrig. Nach der Messung ist es unmöglich zurückzuverfolgen, welches Messergebnis sich ergeben hätte, wenn Alice ein anderes Winkelfach gewählt hätte. Der Postbote kann darüber keine Aufschlüsse geben, denn er ist mit der Messung unwiderufbar verschwunden. Nun macht Bob seine Messung. Auch er kann entsprechend seiner Messachse in nur eine einzige Winkeltasche β greifen. Wieder verpufft das Quentchen im Augenblick der Messung. Übrig bleibt nur eine schwarze oder eine weiße Karte in Bobs Hand. Alice und Bob führen nun viele Messungen durch. Sie wählen in diesem Beispiel immer Winkeltaschen, die im 90° Winkel zueinander stehen. Alice und Bob können ihre Messergebnisse erst miteinander vergleichen, wenn sie die Information über ihre Messresultate austauschen. Beide Muster sind in dieser Winkelstellung antikorreliert.

1.12.3. Die "spukhafte" Quantendimension auf dem Prüfstand [Link zu U1-12-03](#)

Betrachten wir zunächst noch einmal die nach Einstein "spukhafte Fernwirkung" der Quantenmechanik, die seiner Meinung nach eigentlich nicht sein dürfte, um anschliessend eine alternative Erklärung des Experiments ohne eine spukhafte

Quantendimension zu versuchen. Die Wahrscheinlichkeiten in den Winkeltaschen des Quentchens werden sowohl bei Alice als auch bei Bob durch eine gemeinsame Schwingung Omega vorgegeben – in jedem Fach 50 Prozent für schwarz und 50 Prozent für weiß. Alice macht ihre Messung und zerstört dabei eines der beiden Photonen in der gemeinsamen Schwingung Omega. Das übrig gebliebene Photon ist dann entweder vertikal oder horizontal zu Alices Messachse polarisiert, je nach Alices Messergebnis. Die Wahl ihrer Messachse hat daher direkt Einfluss auf das Photon, dessen Signal Bob registriert. Nun liegt die Knotenlinie der Polarisation des übrig gebliebenen Photons bei Bob genau auf der von Alice gewählten Messachse. Bob macht seine Messung. In seinem um 90° zu Alice gedrehten Winkelfach findet er nun mit 100 Prozent Wahrscheinlichkeit das Resultat "Weiß" (\square).

1.12.4. Erklärungsversuch mit verborgenen Parametern anstelle der Quantendimension
[Link zu U1-12-04](#)

Wir nehmen an, dass es keine "spukhafte Fernwirkung" und keine Schwingung Omega gibt. Metaphorisch erschlagen wir mit unserer klassischen Tafel die Wellenfunktion Omega und ihre komplex konjugiertes. Wir gehen ferner davon aus, dass die Messung auf Alices Seite keinen Einfluss auf die möglichen Resultate bei Bob haben kann. Das bedeutet für uns, dass die Wahrscheinlichkeiten von zwei unabhängigen Ereignissen miteinander multipliziert werden können. Mit diesen Annahmen ergibt sich die Korrelationsfunktion als Produkt aus den Differenzen der Einzelwahrscheinlichkeiten für Alice und Bob. Für jeden beliebigen Winkel ist die Differenz $P(\text{weiss})$ minus $P(\text{schwarz})$ eine Zahl zwischen -1 und $+1$. Im Bild zeigen wir willkürlich gewählte Wahrscheinlichkeiten.

Wie müssen die verschiedenen Polarisationsrichtungen von vielen verschiedenen Photonen verteilt sein, damit die experimentell ermittelte Korrelationsfunktion theoretisch reproduziert werden kann? Dann hätten wir eine alternative Erklärung gefunden, die ohne spukhafte Fernwirkung auskommt und Omega existierte nicht. Wir suchen also eine passende Mischung aus vorbestimmten Polarisationsrichtungen. Jedes Photonenpaar bekommt eine Nummer und eine zugehörige vor der Messung festgelegte Polarisationsrichtung. Die beiden Photonen eines Paares haben die gleiche Polarisationsrichtung, die in unserem Bild durch das Oval in einem nummerierten Kasten symbolisiert ist. Die von Einstein sogenannten verborgenen Parameter sind in unserem Beispiel die Nummer des Photonenpaares und dessen spezifische Polarisationsrichtung.

Alice macht die erste Messung. Gemäß der alternativen Theorie beeinflusst dies nicht das Messergebnis von Bob. Bob macht seine Messung. Die Polarisation seines Photons ist nicht erst durch Alice Messachse und Messergebnis festgelegt, sondern steht bereits vor der Messung fest. Nach Mittelung über viele Experimente beziehungsweise nach Mittelung über die verborgenen Parameter erhalten wir nach bekannter Manier jeweils ein Schwarz-Weiß Zufallsmuster. Allein durch die Bestimmung

der Wahrscheinlichkeiten können wir unsere alternative Theorie noch nicht ausschließen. Gewissheit erhalten wir erst, wenn Korrelationen in verschiedenen Winkelstellungen genau untersucht werden.

1.12.5. Bellsche Ungleichung [Link zu U1-12-05](#)

Wir brauchen nun ein allgemeines Kriterium, mit dem wir jede beliebige Theorie, die die Unabhängigkeit der Messungen von Alice und Bob annimmt, anhand der Messdaten der Korrelationsfunktion auf ihre Gültigkeit testen können. Das allgemeine Kriterium liefert uns die Bell'sche Ungleichung. Alice und Bob wählen jeweils zwei verschiedene Winkel (α_1, α_2) , sowie (β_1, β_2) . Auf der Tafel sehen wir einmal zwei Winkeltaschen, die den gewählten Winkel α_1 bzw. β_1 anzeigen. Wir werden nun die Gültigkeit des Produktansatzes für die Korrelationsfunktion testen, indem wir einen Widerspruchsbeweis durchführen. Wir nehmen an, dass der Produktansatz richtig ist, und suchen nach einer Kombination von Korrelationsfunktionen, die dieser Annahme widerspricht. Wir beginnen mit der Aussage, dass der im Bild dargestellte Ausdruck nie größer als zwei ist. Die hier abgebildete Differenz ist ebenfalls nie grösser als zwei. Als Beispiel wählen wir den Extremfall. Die Summe aus beiden mathematischen Ausdrücken ist $2 + 0$ gleich 2 und damit ebenfalls nicht grösser als 2. Dies gilt auch allgemein. Wir setzen die Werte aus dem Winkeltaschen in diese Ungleichung ein. Anschließend multiplizieren wir die Klammern aus. Nach Mittelung über viele Messungen ergeben sich jeweils die Korrelationsfunktionen in den vier Winkelkombinationen. Diese Ungleichung ist eine Variante der berühmten Bell'schen Ungleichung - die CHSH-Ungleichung. Sie wurde unter der Annahme hergeleitet, dass die Messungen von Alice das Resultat bei Bob nicht beeinflussen, und umgekehrt.

1.12.6. Vergleich von Theorie und Experiment [Link zu U1-12-06](#)

Wir vergleichen die aus der Annahme unabhängiger Messungen hergeleitete Ungleichung mit dem Experiment.

$$|C(\alpha_1, \beta_1) + C(\alpha_1, \beta_2) + C(\alpha_2, \beta_1) - C(\alpha_2, \beta_2)| \leq 2$$

Alice und Bob haben durch die "Überlagerung ihrer Schachbrettmuster" experimentell die Korrelationsfunktion gefunden. Wir wählen vier Winkelkombinationen. Aufgrund der Korrelationsfunktion ergibt sich $4 \times 0,71 = 2,84$. Und das ist nicht mehr ≤ 2 . In dieser Winkelkombination ist die Ungleichung also nicht erfüllt. Der Produktansatz für die Korrelationsfunktion widerspricht experimentellen Befunden. Die Annahme, dass die Messungen sich nicht gegenseitig beeinflussen, ist falsch. Die Wechselwirkung des Photonenpaares mit dem Detektor Alice erzeugt Korrelation an einem beliebig weit entfernten Ort. Die Quantenmechanik kann dies erfolgreich durch Interferenz der Wahrscheinlichkeiten beschreiben, die hier untersuchte Theorie mit verborgenen Parametern nicht.

1.12.7. Die Wahrheit ist... Interpretationen der Quantenmechanik [Link zu U1-12-07](#)

Die Quantenmechanik beschreibt sehr erfolgreich die beobachteten Messergebnisse. Dies gilt nicht nur für die hier vorgestellten Experimente sondern geht weit darüber hinaus. Quantenmechanik hat aber keinen Anspruch auf Endgültigkeit, sondern gewinnt ihre Stärke gerade durch ihre Unvollständigkeit. Die Quantendimension wird immer komplexer sein, als wir es uns letzten Endes ausmalen können.

1.13. Auf dem Höhenpass der Quantenmechanik – Rückblick und Grenzbegehung (U1-13)

Diese Station bildet die Grenze zwischen bereits erforschten und noch zu erforschenden Themen der Quantenmechanik. Ehe wir uns zur Terra incognita aufmachen, sollten wir unser Rüstzeug im Rückblick auf die vergangenen 12 Stationen auf Tauglichkeit testen.

1.14. Quantencomputer (U1-14)

Welche Dimensionen eröffnen sich, wenn wir Wahrscheinlichkeiten zu interferenzfähigen Wahrscheinlichkeiten verallgemeinern? Was geschieht in auf den ersten "Schachfeldern" in dem noch wenig erforschten Raum von nichtlokalen Korrelationen? Mit welchen Entdeckungen könnten wir für die Zukunft rechnen?

1.14.1. Schachbrett-Muster [Link zu U1-14-01](#)

Ein klassischer Computer verarbeitet und speichert digitale Daten, die anhand elektrischer Spannungen und Ströme dargestellt werden können. Mathematisch können digitale Daten durch die Zahlen 0 und 1 symbolisiert werden. Wir haben zur Visualisierung digitaler Daten schwarze und weiße Felder (■, □) auf einem Schachbrett gewählt. Um diese Daten weiter zu verarbeiten, müssen Rechenoperationen durchgeführt werden. Eine der wichtigsten Operationen für den Computer ist die binäre Addition von Zahlen: $1 + 1 = 0$. Worin unterscheidet sich der klassische Computer von einem Quantencomputer? Welche Bedeutung spielt dabei das Experiment von Alice und Bob? Und warum sollten Geheimdienste, staatliche Behörden und Banken die Entwicklung eines Quantencomputers mit Interesse verfolgen? Diese Fragen stellen wir uns in der letzten Station der Linie U1 von "Omega-City".

1.14.2. Der klassische Computer [Link zu U1-14-02](#)

Klassische Computer verarbeiten Informationen durch einfache logische Operationen, d. h. durch binäre Addition bzw. Multiplikation. Schauen wir uns eine einfache Metapher, einen Lichtschalter an. Betrachten wir die Wahrheitstabellen für binäre Addition und Multiplikation. Das neutrale Element der Addition ist Null (0), das der Multiplikation ist plus Eins (+1). In beiden Fällen interpretieren wir das neutrale Element als "Schalter nicht umstellen". Die Zahl Eins (1) bei der Addition bzw. minus Eins (-1) bei der Multiplikation interpretieren wir als "Schalter umstellen". Die Ausführung von

zwei Operationen nacheinander ($x + y$ bzw. xy) führt zu den hier gezeigten Wahrheitstabellen. Insbesondere ist die Operation "Schalter zweimal umstellen" identisch mit "Schalter nicht umstellen". Die Rechnungen eines klassischen Computers basieren auf diesen einfachen Regeln. So bezeichnet man die Operation "Schalter umstellen" an einem einzelnen Bit in der Informatik als NOT-gate. Die hier gezeigte Wahrheitstabelle der binären Addition entspricht dem CONTROLLED NOT-gate.

1.14.3. Raum der Wahrscheinlichkeiten [Link zu U1-14-03](#)

Die Anzahl von Atomen, die bei der Speicherung von einem Bit - Zustand "Schwarz" oder "Weiß" beteiligt sind, lag im Jahre 1960 bei 10^{17} und hat sich im Laufe der Computerentwicklung exponentiell verringert. Irgendwann werden es nur noch wenige Atome sein, die für eine Datenverarbeitung notwendig sind. Allerdings betrachten wir dann Größen, bei denen wir das Verhalten von quantenmechanischen Partikeln nicht mehr vernachlässigen können. Bei einzelnen Quanten können wir nur mit Wahrscheinlichkeiten und Interferenzen operieren, bewegen uns also in der Quantendimension. Wir betrachten hier allgemeine Folgerungen die aus den quantenmechanischen Grundprinzipien "Wahrscheinlichkeit" und "Interferenz" resultieren und für jeden Quantencomputer gelten. Im Gegensatz zum quasi-deterministischen Computer, bei denen der Wert eines Bits entweder schwarz oder weiß ist, können wir bei einem Quantencomputer nur die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{schwarz})$ und $P(\text{Weiß})$ für schwarz oder weiß angeben. Für 1 Bit ergibt sich aus dem Zusammenhang $P_{\blacksquare} + P_{\square} = 1$, dass nur eine der beiden Wahrscheinlichkeiten frei wählbar ist. Das heisst, ein Parameter ist frei. Für den Spezialfall $P_{\blacksquare} = 0$ und $P_{\square} = 1$ bzw. $P_{\blacksquare} = 1$ und $P_{\square} = 0$ erhalten wir einen deterministischen Computer mit sicher gespeicherten Daten. Der klassische Computer kann also als Spezialfall des Quantencomputers angesehen werden. Für 2 Bits ergeben sich vier Kombinationen $((\square, \square), (\blacksquare, \square), (\square, \blacksquare), (\blacksquare, \blacksquare))$ mit vier Wahrscheinlichkeiten $(P_{\square, \square}, P_{\blacksquare, \square}, P_{\square, \blacksquare}, P_{\blacksquare, \blacksquare})$. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten und beträgt 100 Prozent, mit drei freien Parametern zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten. Für 3 Bits erhalten wir acht Kombinationen. Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 100 Prozent sein muss, gibt es sieben freie Parameter zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten. Die Anzahl von möglichen Kombinationen verdoppelt sich mit jedem Feld und ist allgemein 2^N .

1.14.4. Ein Qubit [Link zu U1-14-04](#)

In der Station "Herz der Quantenmechanik" (U1-06) haben wir betrachtet, wie die Beobachtungswahrscheinlichkeiten P_{\blacksquare} und P_{\square} mit der für uns unbeobachtbaren Schwingung in der Quantendimension zusammenhängt. Beide Wahrscheinlichkeiten werden zu jeweils einem drehenden Rad mit zwei Parametern erweitert: einem Radius und einer Phase. Diese Verallgemeinerung definiert den Übergang von einem klassischen Bit zu einem Quanten-Bit oder Qubit. Wir betrachten als konkretes Beispiel ein Photon

am polarisierenden Strahlteilerwürfel. Die Umdrehungsfrequenzen der Räder sind beide proportional zur Energie E des Photons.

1.14.5. Zwei Qubits [Link zu U1-14-05](#)

Wir betrachten die Kombination von zwei Photonen und die möglichen Messergebnisse $((\square, \square), (\blacksquare, \square), (\square, \blacksquare), (\blacksquare, \blacksquare))$. Wenn die Photonen nicht miteinander verschränkt sind, sind die Messergebnisse voneinander unabhängig. Beginnen wir unsere Überlegungen mit diesem Fall. Wahrscheinlichkeiten von zwei unabhängigen Ereignissen werden miteinander multipliziert. Wir verallgemeinern nun zu interferenzfähigen Wahrscheinlichkeiten. In der Quantendimension erhalten wir für jedes Photon (bzw. Qubit) jeweils einen dreidimensionalen Parameterraum, Wenn beide Photonen voneinander unabhängig sind, erhalten wir einen sechsdimensionalen Raum aller Produktzustände von zwei unabhängigen Photonen in der Quantendimension. Doch Photonen können miteinander verschränkt sein. Was lässt sich daraus für die tatsächliche Anzahl der Dimensionen folgern? Wir erhalten pro Messung eines Photonenpaares eine von vier Kombinationen. Um auf die Quantendimension hinter den Messergebnissen schließen zu können, müssen die vier kombinierten Wahrscheinlichkeiten $(P_{\square, \square}, P_{\blacksquare, \square}, P_{\square, \blacksquare}, P_{\blacksquare, \blacksquare})$ zu interferenzfähigen Wahrscheinlichkeiten verallgemeinert werden. Also ordnen wir jeder Wahrscheinlichkeit ein drehendes Rad zu. Jedes drehende Rad hat eine Phase und einen Radius. Insgesamt verdoppelt sich also die Anzahl der Parameter von vier auf acht. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit gilt 100 Prozent. Somit ist die Anzahl freier Parameter von zwei Qubits gleich $8 - 1 = 7$. Die Quantendimension von zwei unabhängigen Photonen hat aber nur sechs Dimensionen. Die siebte Dimension wird durch den Parameter c , die concurrence definiert. Sie gibt das Maß der Verschränkung an: Für $c = 0$ sind die Photonen unabhängig voneinander, für $c = 1$ sind sie maximal verschränkt.

1.14.6. Die vier Bell-Zustände in der "Siebten Dimension" [Link zu U1-14-06](#)

Die maximal verschränkten Zustände sind die vier Bell-Zustände. Mit dem BBO-Kristall lassen sich alle vier Bell-Zustände erzeugen. Dazu müssen zusätzliche, passende Polarisationsdreher im Strahlengang installiert werden. Die rotationssymmetrische Schwingung Omega, $|\Omega\rangle$ wird in der Fachliteratur als Bell-Zustand als $|\Phi^+\rangle$ bezeichnet. Der Bell-Zustand $|\Phi^-\rangle$ ergibt sich aus der Überlagerung von Photonen, die in plus 45° bzw. minus 45° -Richtung linear polarisiert sind. Der Bell-Zustand $|\Psi^+\rangle$ ergibt sich aus der Überlagerung von Photonen, die in vertikaler und horizontaler Richtung polarisiert sind. Der Bell-Zustand $|\Psi^-\rangle$ ist etwas Besonderes: Er ist antisymmetrisch unter Vertauschung der Polarisation von Photon 1 und Photon 2.

1.14.7. Lokale und nichtlokale Dimensionen [Link zu U1-14-07](#)

Ein Qubit: Von diesen 4 Parametern sind nur 3 frei wählbar, da die Summe



Figure 12. Die Anzahl nichtlokaler Dimensionen (rote Reiskörner) wächst exponentiell mit der Anzahl von Qubits in der Quantendimension, die Anzahl lokaler Dimensionen nur linear.

aus beiden Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss. Diese 3 Parameter sind lokal diesen einen Schachfeld zugeordnet. Zwei Qubits: Bei zwei Schachfeldern ergibt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine von vier Kombinationen. Diese vier Wahrscheinlichkeiten werden in der Quantendimension zu Schwingungen mit insgesamt 8 Parametern verallgemeinert. Da die Summe aus den Wahrscheinlichkeiten 1 ist, ergibt sich allgemein ein 7-dimensionaler Raum in der Quantendimension. Jeweils 3 Dimensionen sind lokal dem ersten beziehungsweise zweiten Schachfeld zugeordnet. Die vier Bell-Zustände befinden sich im nicht-lokalen Anteil der Quantendimension, der siebenten Dimension c , egal ob wir die Polarisation eines Photonenpaares, den Spin eines Elektronenpaares, oder andere Quantenzustände betrachten. Drei Qubits: Wir tauchen weiter in die Quantendimension ein und betrachten 3 Schachfelder. In diesem Fall würden 3 Detektoren A, B und C acht mögliche Messergebnisse registrieren. Wie viele nichtlokale Dimensionen verbergen sich nun in der Quantendimension hinter drei Schachfeldern? Und welcher quantendimensionale Raum steckt in 64 klassischen Bits, also hinter einen Quantencomputer mit 64 Qubits?

1.14.8. Nichtlokale Reiskörner [Link zu U1-14-08](#)

Wir versinnbildlichen die Dimensionen eines Qubits durch Reiskörner. Jedem Reiskorn entspricht also ein freier Parameter bzw. eine Dimension innerhalb der Quantendimension. Das erste Qubit hat vier Dimensionen. Aufgrund der Bedingung $P_{\blacksquare} + P_{\square} = 1$ gibt es drei frei wählbare Parameter. Jedem Schachfeld weisen wir nun eine Nummer zu. Das erste Feld bezeichnen wir mit Qubit 13,0. Im Experiment

beobachtbar sind von diesen drei Dimensionen nur zwei, da nur Phasendifferenzen zu einem registrierbaren Effekt führen. Häufig wird zur Darstellung eines Qubits die sogenannte Bloch-Kugel verwendet.

Die Kombination aus zwei Qubits hat acht Dimensionen; nur sieben sind voneinander unabhängig. Pro Qubit werden lokal drei Dimensionen zugeordnet, ein rotes Reiskorn bleibt übrig, das einer nichtlokalen Dimension entspricht. In dieser Dimension schwingt der Zustand $|\Omega\rangle$. Alle weiteren Schwingungen in dieser siebten Dimension lassen sich durch die mathematische Operation einer lokalen, komplexen Drehung aus Omega ableiten. Wir können uns dies wie einen Stammbaum vorstellen, bei dem es Verwandte gibt, die miteinander über bestimmte Wege in Verbindung stehen. Zum Beispiel können alle anderen Bell-Zustände auf diese Weise aus Omega erzeugt werden.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \equiv |\Omega\rangle$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Es reicht also, nur diese eine Schwingung als Repräsentant der nichtlokalen Dimension zu nehmen, sozusagen als Vertreter der Familie. Die zwei ersten Felder als Einheit beschreiben wir mit der Nummer Qubit 26, 1, wobei die erste Zahl in der geschweiften Klammer die Anzahl lokaler, und die letzte Zahl die Anzahl nichtlokaler Dimensionen beschreibt. Nun gehen wir einen Schritt weiter und betrachten die Kombination aus drei Qubits mit 16 Dimensionen, von denen 15 frei wählbar sind. Pro Qubit werden lokal drei Dimensionen zugeordnet, sechs rote Reiskörner als Repräsentanten der nichtlokalen Dimensionen bleiben übrig.

Welche Repräsentanten haben diese sechs nichtlokalen Dimensionen? Es gibt drei Möglichkeiten, um aus diesen drei Schachfeldern zwei Felder auszuwählen. Für jede dieser 3 Kombinationen gibt es je eine Schwingung Omega, die diese beiden Felder verbindet. Dies sind die ersten drei roten nichtlokalen Dimensionen. Es bleiben noch drei nichtlokale Dimensionen übrig. In diesen Dimensionen befinden sich Schwingungen, die nicht nur zwei, sondern alle drei Felder nichtlokal verbinden. Es zeigt sich, dass es genau zwei Typen von verschränkten Zuständen gibt, die alle drei Felder miteinander verbinden können. Der erste Typ wird durch den GHZ-Zustand repräsentiert.

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

”GHZ“ für die drei Physiker Greenberger, Horn und Zeilinger. Der GHZ-Zustand wurde erstmals 1998 experimentell nachgewiesen. Der zweite Typ wird von dem W-Zustand repräsentiert.

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)$$

”W“ für den Physiker Wolfgang Dür. Diese beiden Zustände sind die ersten Beispiele für die Verschränkung von drei Teilchen. Zu deren Beobachtung wären also nicht nur die Detektoren Alice und Bob, sondern noch ein dritter Detektor an einem weiteren Ort nötig. Die sechste nichtlokale Dimension führt als irrelevanter Phase zu keinem beobachtbaren Effekt. Damit haben wir die Verschränkung von einem System aus drei Qubits beschrieben

Im nächsten Schritt schauen wir uns 4 Qubits an. Hier vollzieht sich etwas Spannendes: Erstmals überwiegt die Zahl der nichtlokalen Dimensionen. Von den $3^2 - 1 = 31$ Dimensionen sind $4^3 = 12$ lokal und $3^1 - 12 = 19$ nichtlokal. Die Kombination aus vier Schachfeldern kennzeichnen wir mit der Nummer Qubit 412, 19.

Je weiter wir in die Quantendimension eintauchen, desto mehr Dimensionen nimmt die Nichtlokalität ein. Während pro Qubit die Anzahl lokaler Dimensionen stets nur um drei zunimmt, vervielfacht sich die Anzahl nichtlokaler Dimensionen exponentiell. Die unsichtbaren Dimensionen verdoppeln sich mit jedem weiteren Feld und weisen den Weg in eine riesige, in vielen Aspekten noch unbekannte Welt. In unserer Metapher der roten Reiskörner, die exponentiell zunehmen, verdoppelt sich das ”Volumen“, das die Reiskörner einnehmen, mit jedem Feld. Jedes rote Reiskorn für sich genommen ist ein kleines Universum, eine Dimension, die mit diesen Milliarden anderer Dimensionen auf komplexe und faszinierende Weise verwoben ist.

1.14.9. Zukunft der Quantenmechanik ”Die Wahrheit ist ...“ [Link zu U1-14-09](#)

Einerseits haben wir handfeste, mathematische und experimentelle Beweise für die nichtlokale, nicht direkt beobachtbare Welt. Fast täglich werden durch weltweite Forschungsaktivitäten weitere Eigenschaften der Quantendimension in Theorie und Experiment besser verstanden und durchdrungen. Andererseits widersprechen die Eigenschaften der Quantendimension in vielen Aspekten unserem lokalen, klassischen Weltbild. Trotz allen Verstehens wird eine unüberwindbare Grenze zwischen den Dimensionen nichtlokaler, nicht direkt beobachtbarer Schwingungen und unserem lokalen, beobachtbaren Raum bestehen bleiben.

Mathematischer Kommentar zu U1: Quantendimensionen

Zu den Übungsaufgaben auf Station U1-13 ist ein [mathematischer Kommentar](#) erschienen.

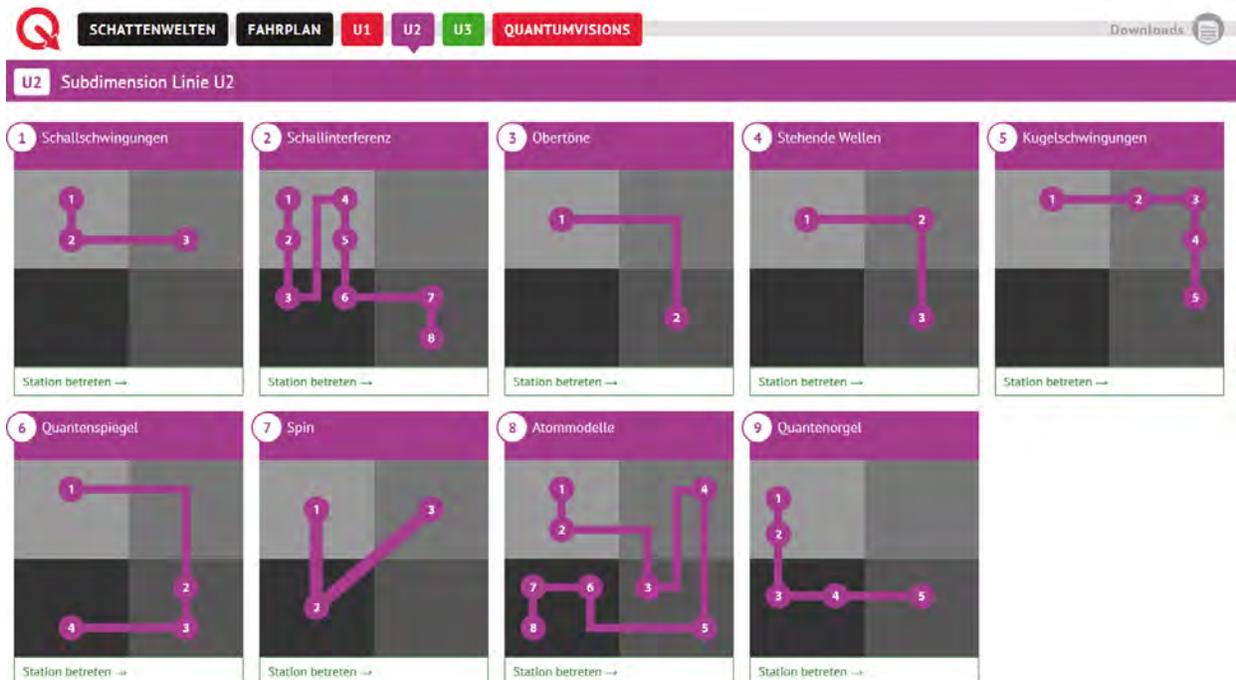


Figure 13. Überblick über die Stationen der U2: <https://www.quantenspiegelungen.de/subdimension-linie-u2/>

2. U2: Quantenspiegelungen

Was haben Obertöne mit dem Periodensystem der Elemente zu tun? Welchen Zusammenhang gibt es zwischen schwingenden Elektronen im Atom und dem Spektrum einer schwingenden Saite? Die Quantenspiegelungen eröffnen einen visuellen Zugang zur Quantenphysik: Aus einfachen Schwingungsmustern der Gitarrensaite entsteht durch Spiegelungen, Drehungen und Verknotungen das komplette Periodensystem der Elemente!

2.1. Von Bildern des Schalls (U2-1)

In dieser Station zeigen wir, wie man Schallwellen fotografieren kann.

2.1.1. Drehende Räder [Link zu U2-1-01](#)

Die dreidimensionale Welt – eine Schattenwelt? Ein Oberflächeneffekt eines viel höher dimensionalten Raums? Oder bedingen sich Schattenwelt und Quantendimension, existieren sie, weil sie eine Symbiose bilden? Folgen sie mir in meine Dimension. Die letzte Station der U-Bahnlinie U1 Quantendimensionen ist gleichzeitig die Einleitung zur Linie U2 Quantenspiegelungen. In den folgenden neun Stationen der Linie U2 suchen wir erneut Bilder, Modellierungen und Visualisierungen von Schattenwelt und



Figure 14. Alice und Bob auf der Suche nach Omega: Die Reise geht auf der Linie U2 weiter.

Quantendimension. Omegas Haus zeigt den Schatten des drehenden Rads, das uns als Motiv auch auf unserer Reise durch die Quantenspiegelungen begleiten wird. Das drehende Rad wird im Laufe der Stationen der U2 seine Gestalt wandeln – vom Modell für die Beschreibung klassischer Schwingungen in einer, zwei und mehr Dimensionen, bis zur Visualisierung von Quantenzuständen und dem Aufbau des Periodensystems.

In den ersten beiden Stationen dient das drehende Rad aber zunächst als Modell für Phase, Frequenz und Amplitude von Schallwellen.

2.1.2. Schallwellen und Schallintensität [Link zu U2-1-02](#)

Ein Sinuston mit einer bestimmten Frequenz lässt sich symbolisch durch ein drehendes Rad darstellen - die Umdrehungsfrequenz entspricht der Schallfrequenz, der Radius der Schallamplitude. Durch das Mikrophon wird der Schall aufgenommen und über den Verstärker als elektrisches Signal zur Lampe geleitet. Die Lautstärke nimmt mit dem Abstand ab, der Radius des Rades wird daher immer kleiner.

Aber wo ist denn nun die Welle? Um diese sichtbar zu machen, brauchen wir die sogenannte Phasendifferenz, also die Verschiebung des Zeigers, die sich aufgrund des Abstands vom Lautsprecher zum Mikrophon ergibt.

2.1.3. Phase der Schallwelle [Link zu U2-1-03](#)

Aber wo ist denn nun die Welle? Um diese sichtbar zu machen, brauchen wir die sogenannte Phasendifferenz, also die Verschiebung des Zeigers, die sich aufgrund des Abstands vom Lautsprecher zum Mikrophon ergibt.

Mit folgendem Trick können wir diese Phasenverschiebung sozusagen "einfrieren":

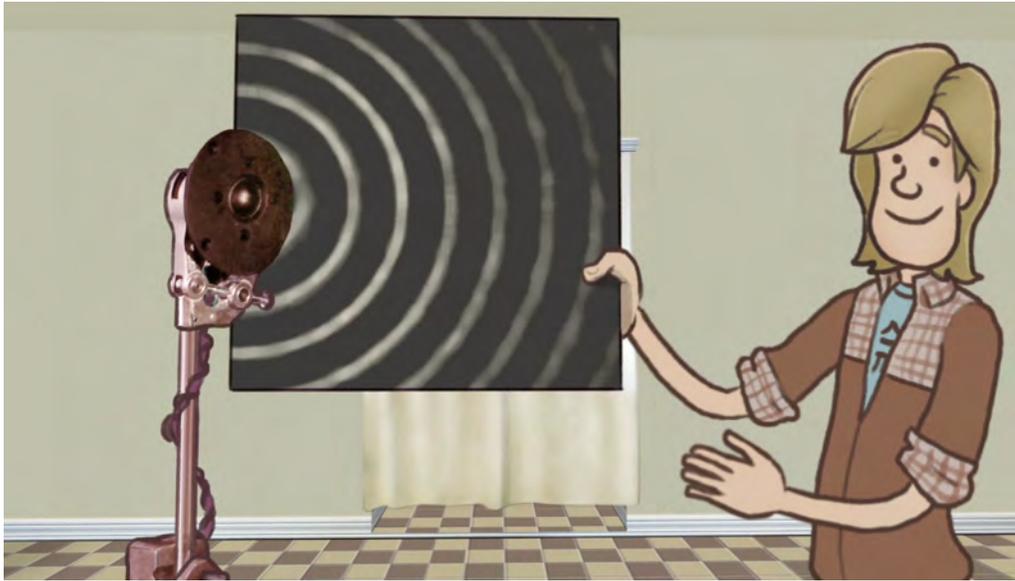


Figure 15. U1-01-02

Wir kopieren das Ausgangssignal des Lautsprechers zu der Position von Lampe und Mikrophon, und addieren dieses zu dem Signal, das das Mikrophon aufnimmt. Der Winkel zwischen den drehenden Rädern, also die Phasendifferenz, bleibt nun fest und ist auch bei der sich ausbreitenden Welle sozusagen eingefroren.

Die Lampe leuchtet nun bei steigendem Abstand periodisch hell und dunkel, je nach Phasendifferenz der beiden drehenden Räder.

Im Minimum, also bei einer Phasenverschiebung von einer halben Wellenlänge, stehen die drehenden Räder gerade entgegengesetzt. Im Maximum, also bei einer ganzen Wellenlänge Phasenverschiebung, zeigen sie in dieselbe Richtung. Die Phasenverschiebung wächst kontinuierlich, so dass Hell und Dunkel sich im Abstand einer halben Wellenlänge der Schallwelle abwechseln. Wedeln wir mit dem Stab nach oben und unten, können wir die Schallwelle im Raum sozusagen abtasten und wir erhalten in der Langzeitbelichtung - ein Abbild von Minima und Maxima der Schallwelle!

2.2. Schallinterferenz (U2-2)

Die Station U2-2 ist identisch zu U1-01, beide Linien überlagern sich hier.

2.3. Vom Gemisch der Frequenzen (U2-3)

In dieser Station erläutern wir die Frequenzanalyse bzw. Fouriertransformation.

2.3.1. Von der Welle zur Quelle [Link zu U2-3-01](#)

Wir können die Schallwelle hören, aber das verwendete Instrument bleibt im dunklen Raum verborgen. Gibt es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der

Schallwelle und der Quelle, können wir also eindeutig aus dem akustischen Signal auf die genauen Eigenschaften des verwendeten Musikinstrumentes schließen? Diese Frage beschäftigt uns in dieser und in der folgenden Station.

Am Computer ist es möglich, die Schallwelle aufzunehmen und den zeitlichen Verlauf der Amplitude genauer zu studieren. Wenn wir die zeitliche Auflösung immer weiter verfeinern, sehen wir schließlich die einzelnen Druck- und Dichteschwankungen der Schallwelle.

Im Vergleich zu einem Sinuston mit fester Frequenz, hier dargestellt als drehendes Rad, ist der zeitliche Verlauf dieser Amplitude weitaus komplizierter. Ist es möglich, diese Schallwelle als Überlagerung von vielen verschiedenen Frequenzen und Amplituden, also vielen verschiedenen drehenden Rädern mit passenden Umdrehungsfrequenzen und Radien, darzustellen?

2.3.2. *Fouriertransformation* [Link zu U2-3-02](#)

Wir betrachten die Überlagerung einer ganz speziellen Anordnung drehender Räder. Gegeben sei eine Grundfrequenz f , sowie die doppelte, dreifache, vierfache, fünffache und sechsfache dieser Grundfrequenz. Die Amplituden der einzelnen drehenden Räder sollen abnehmen wie ein Halb, ein Drittel, ein Viertel, ein Fünftel, und ein Sechstel der Amplitude der Grundfrequenz f . Wie sieht der zeitliche Verlauf dieser Überlagerung aus? Drehen sich die einzelnen Räder mit den entsprechenden Frequenzen und Amplituden, ergibt sich eine Art Sägezahnwelle.

Hier sehen wir den zeitlichen Verlauf der Sägezahnwelle. Dieselbe Information lässt sich aber auch anders kodieren: Wir betrachten die einzelnen drehenden Räder und deren Umdrehungsfrequenzen. Beginnen wir mit dem Grundton mit der Frequenz f und der Amplitude r , also dem Radius dieses Rades. Dann tragen wir die Amplituden der Vielfachen der Grundfrequenz ebenfalls auf. Wir erhalten das sogenannte Spektrum der Welle. Das Spektrum beschreibt also, welche Frequenzen mit welchen Amplituden in der Welle vorhanden sind. Aus dem Spektrum kann der zeitliche Verlauf der Welle wieder rekonstruiert werden.

Der mathematische Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Verlauf einer Welle, sowie den Frequenzen und zugehörigen Amplituden ist die sogenannte Fourier-Transformation, benannt nach dem französischen Mathematiker Fourier. Heutzutage lassen sich am Computer Schallwellen sehr einfach auf ihren Frequenzgehalt hin untersuchen, und somit die Welle entweder im zeitlichen Verlauf oder im sogenannten Frequenzraum beschreiben. Die Fourieranalyse gehört zu den wichtigsten Analysemethoden in den Naturwissenschaften.

Kommen wir auf die Eindeutigkeit zurück: Ist es möglich, von der Schallwelle auf die Schallquelle zu schließen? Ist das Frequenzspektrum ein eindeutiger Fingerabdruck für das verwendete Musikinstrument? Diese Frage beantworten wir in der nächsten Station.

2.4. Von schwingenden Saiten (U2-4)

In dieser Station diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Knotenpunkten und dem Obertonspektrum einer Saite.

2.4.1. Schwingende Gitarrensaite [Link zu U2-4-01](#)

Klassische Musikinstrumente wie etwa eine Gitarre stehen in dieser Station im Mittelpunkt. Wir analysieren das Spektrum einer einzelnen schwingenden Saite.

Im Bild sehen wir aber keine gewöhnliche Gitarre: Die Spiegelungen deuten auf eine Neuinterpretation der grundlegenden Schwingungsmuster der Gitarrensaite hin. Der Schlüssel liegt in Knotenpunkten, -linien und Flächen stehender Wellen, und in einem Spiel der Dimensionen und Symmetrien, die in allen folgenden Stationen wie Thema und Variation immer wieder aufleben werden.

2.4.2. Spektrum der Gitarrensaite [Link zu U2-4-02](#)

Klassische Musikinstrumente wie etwa eine Gitarre stehen in dieser Station im Mittelpunkt. Wir analysieren das Spektrum einer einzelnen schwingenden Saite.

Im Bild sehen wir aber keine gewöhnliche Gitarre: Die Spiegelungen deuten auf eine Neuinterpretation der grundlegenden Schwingungsmuster der Gitarrensaite hin. Der Schlüssel liegt in Knotenpunkten, -linien und Flächen stehender Wellen, und in einem Spiel der Dimensionen und Symmetrien, die in allen folgenden Stationen wie Thema und Variation immer wieder aufleben werden.

Durch Anzupfen wird die Saite in Schwingung versetzt. Diese können wir aber nicht direkt hören. Nur wenn sich die schwingende Saite in Luft befindet, wird durch die Luftmoleküle die Schwingung als Druck- und Dichteschwankung mit Schallgeschwindigkeit bis zu unserem Ohr weitergetragen.

Mit einem Computer können wir den zeitlichen Verlauf der Schallwelle aufnehmen. Aus welchem Gemisch von Frequenzen der Klang der Saite besteht, verrät uns die Fourier-Transformation.

Es fällt auf, dass es eine niedrigste Frequenz f_{Null} gibt, den sogenannten Grundton. Weiterhin ergibt sich ein äquidistantes Spektrum, d.h. alle weiteren Amplituden haben doppelte, dreifache, vierfache oder allgemein n -fache Frequenz des Grundtons. Alle diese Obertöne ergeben - zusammen mit dem Grundton - das Spektrum der schwingenden Saite.

Ist es möglich, aus diesem Spektrum auf die schwingende Saite zu schließen, z.B. auf die Saitenlänge? Können wir also eindeutig von der Welle auf die Quelle Rückschlüsse ziehen?

2.4.3. Stehende Wellen [Link zu U2-4-03](#)

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Frequenzspektrum der Schallwelle und der Schwingung auf der Saite? Betrachten wir zunächst nur den Grundton f_0 .

Die Saite wird durch Anzupfen in Schwingung versetzt. Diese Schwingung wird durch die Luft mit Schallgeschwindigkeit übertragen. Wir betrachten zwei Punkte, den Punkt A in der Luft, und den Punkt B auf der Saite. In der Luft erhalten wir eine sich ausbreitende Schallwelle. Der Grundton hat die Frequenz f_0 , das entspricht einem Rad mit Umdrehungsfrequenz f_0 , hier visualisiert im räumlichen und zeitlichen Verlauf.

Am Punkt B auf der Saite haben wir eine andere Situation, denn die Schwingung wird ja an den beiden Randpunkten der Saite immer wieder hin- und her reflektiert. Es gibt also eine rechts- und eine linkslaufende Welle, die sich überlagern, und somit eine stehende Welle bilden. Die Frequenz dieser stehenden Welle ist ebenfalls f_0 . Am Rand ergeben sich zwei Knotenpunkte, die Saite bewegt sich dort ja nicht. In der Mitte bildet sich ein Schwingungsbauch. Diese stehende Welle auf der Saite mit Länge l entspricht einer halben Wellenlänge auf der Saite. Dies ist die Schwingung, die sich hinter dem Grundton mit der Frequenz f_0 verbirgt.

Bei doppelter Frequenz halbiert sich die Wellenlänge, denn das Produkt aus Frequenz und Wellenlänge ergibt stets die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit auf der Saite. Das heißt, auf der schwingenden Saite hat nicht nur ein Wellenbauch, sondern zwei Wellenbäuche Platz, und es gibt einen Knotenpunkt mehr genau in der Mitte der schwingenden Saite.

Ebenso wird bei dreifacher Frequenz wieder die Wellenlänge verkleinert und es passt noch genau ein Schwingungsbauch mehr auf die schwingende Saite, und entsprechend ergibt sich auch ein Knotenpunkt mehr.

Fassen wir zusammen: Stehende Wellen bilden sich, wenn das Vielfache einer halben Wellenlänge auf der schwingenden Saite Platz hat. Im einfachsten Fall haben wir nur zwei Knotenpunkte am Rand und einen Schwingungsbauch, das ist der Grundton. Der erste Oberton hat einen Knotenpunkt mehr als der Grundton, der zweite zwei, und so weiter. Bei Verdopplung der Frequenz halbiert sich die Wellenlänge relativ zum Grundton, bei Verdreifachung ergibt sich ein Drittel der Wellenlänge, und so geht das weiter für alle Vielfachen der Frequenz des Grundtons.

Kommen wir nun zu der Frage der Eindeutigkeit zurück. Ist dieses Spektrum ein eindeutiger Fingerabdruck für die schwingende Saite mit der Länge l ? Nun, zunächst scheint es so, denn offenbar hängen die Frequenz und die Saitenlänge l zusammen wie l gleich n mal λ halbe.

Wir betrachten zwei verschiedene schwingende Saiten mit verschiedenen Längen und verschiedenen Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 auf der jeweiligen Saite. Zunächst klingt die längere Saite tiefer, d. h. wir haben wieder ein äquidistantes Spektrum, nur ist der Grundton f_0 ein wenig nach unten verschoben und somit auch alle Vielfachen von f_0 , also alle Obertöne.

Wenn wir aber bei der längeren Saite die Saitenspannung erhöhen und somit die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c_2 so anpassen, dass das Verhältnis aus Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und Länge gleich ist für beide schwingenden Saiten,

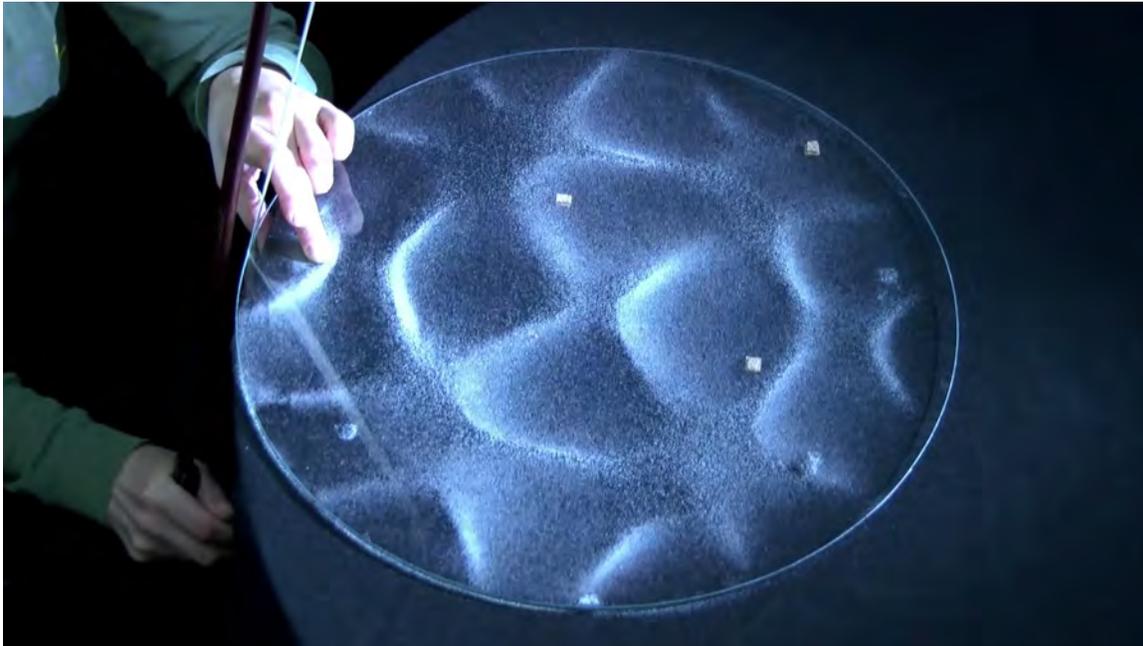


Figure 16. Chladnische Klangfigur auf einer Glasplatte. An den Knotenlinien der Schwingung bleiben das feine Pulver liegen.

ergibt sich ein identisches Spektrum, d. h. der Grundton ist gleich und die Obertöne auch, obwohl die Saiten verschiedene Längen haben.

Na klar, man kann beispielsweise auch eine Gitarre so stimmen, dass zwei verschiedene Saiten denselben Grundton haben!

Wenn es bei der schwingenden Saite keinen eindeutigen Rückschluss auf das verwendete Instrument gibt, ist das bei komplizierteren Instrumenten erst recht nicht der Fall. Tut mir leid, Bob!

2.5. Kugelschwingungen (U2-5)

In dieser Station diskutieren wir stehende Wellen in einer und zwei Dimensionen, und den Übergang von Knotenpunkten zu Knotenlinien bei stehenden Wellen.

2.5.1. Wasserwellen [Link zu U2-5-01](#)

Die Suche nach der Quantenschwingung Omega in klassischen Medien ist ein Schlag ins Wasser. Immerhin verlassen Alice und Bob in dieser Station die eindimensionale Welt von schwingenden Saiten und betrachten zweidimensionale Schwingungen. Sie suchen Omega, finden aber nur den Hausmeister.

Die in dieser Station vorgestellten schwingenden Glasplatten, Tassen und Seifenblasen sind faszinierende und ästhetische Visualisierungen zweidimensionaler Schwingungsmuster, die gleichzeitig auch wichtige Hinweise bei unserer weiteren Spurensuche nach Omega in den Quantenspiegelungen geben werden.

2.5.2. Chladni-Figuren [Link zu U2-5-02](#)

Die schwingende Saite des Monochords ist ein Beispiel für eine stehende Welle in einer Dimension. Die möglichen Grundmoden auf der Saite lassen sich durch die Anzahl von Knotenpunkten klassifizieren. Bereits im 19. Jahrhundert hatte Chladni mögliche Schwingungsmoden in zwei Dimensionen untersucht. Aus Knotenpunkten werden in zwei Dimensionen Knotenlinien. Chladni hatte eine einfache und geniale Idee, diese sichtbar zu machen: Mit einem Geigenbogen lässt sich beispielsweise eine runde Glasscheibe in Schwingung versetzen. Wir verstreuen auf der Scheibe ein feines Pulver. Halten wir die Glasscheibe an passender Stelle fest, erhalten wir eine sogenannte Chladni'sche Klangfigur. Wie können wir das erklären?

Die liegengelassenen Körnchen verraten, wo sich die Platte nicht bewegt, wo also Knotenlinien der Schwingung entstehen. Schneiden wir die Glasplatte in der Mitte durch, erkennen wir eine eindimensionale stehende Welle mit zwei Knotenpunkten. An den Enden und in der Mitte der Glasscheibe befinden sich Schwingungsbäuche, hier werden die Körnchen weggetrieben. Nur an den Knotenpunkten bleiben sie liegen. Durch Rotation wird aus den Knotenpunkten eine Knotenlinie auf der Scheibe. Bei dieser Schwingungsmode der Glasplatte bildet sich eine sogenannte radiale Knotenlinie bei Radius r_1 .

Halten wir die Glasscheibe an passender Stelle am Rand fest, erhalten wir so ein Muster. Welcher Schwingungsmode entspricht diese Klangfigur? Diesmal betrachten wir die Schwingung auf dem äußeren Halbkreis mit den entsprechenden Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen. Es ergibt sich am Rand der Glasscheibe eine stehende Welle mit vier Schwingungsbäuchen. Das Muster setzt sich auf der gesamten Glasscheibe fort, also für alle Radien. Die Knotenlinien befinden sich also bei festen Winkeln - darum nennt man sie azimuthale Knotenlinien. In diesem Fall ist der Winkel ϕ zwischen den beiden azimuthalen Knotenlinien gleich 90 Grad.

Wir bezeichnen Knotenlinien bei festem Winkel als azimuthal, und Knotenlinien bei festem Radius als radial. Natürlich gibt es auch Schwingungsmoden, die beide Arten kombinieren - hierfür benutzen wir eine Glasscheibe mit etwas größerem Radius. Bei passender Haltung der Finger erhalten wir eine Schwingungsmode mit einer radialen und einer azimuthalen Knotenlinie.

Je größer die Glasplatte, desto mehr Knotenlinien haben auf ihr Platz, und desto komplizierter können die Schwingungsmuster werden. Zeichnen wir die Knotenlinien nach, ergibt sich diese Klangfigur. Diese ist nur eine von hunderten von Beispielen komplizierter Schwingungsmoden, die auf einer Glasscheibe erzeugt werden können - und die von Chladni untersucht wurden.

Aber alle diese komplizierten Muster lassen sich durch Fouriertransformation zurückführen auf Überlagerung oder Superposition von einfachen Grundmoden: Diese Grundmoden lassen sich durch die Anzahl l von azimuthalen Knotenlinien, und die Anzahl r von radialen Knotenlinien charakterisieren - also $l = 0, 1, 2, 3$ sowie $r = 0, 1, 2, 3$ usw., und Kombinationen von r und l .

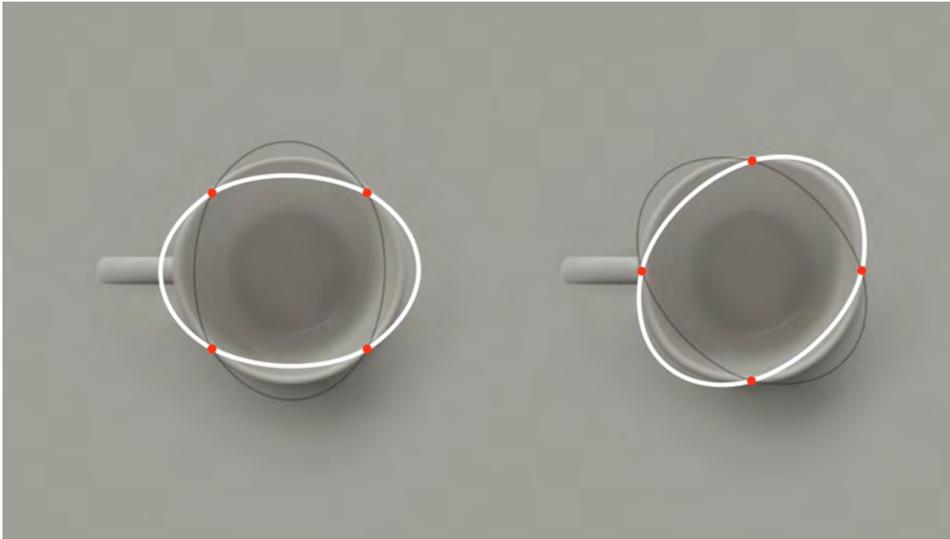


Figure 17. Stehende Wellen am Tassenrand. Wieso klingt die Tasse unterschiedlich je nach Ort, wo der Löffel angeschlagen wird?

Umgekehrt kann durch Überlagerung dieser Grundmoden jede mögliche Schwingung auf der Glasplatte beschrieben werden. Hier z.B. sehen wir die Mischung aus der Grundmode $r = 2, l = 2$ mit der Grundmode $r = 3$. Auf diese Weise können wir die Chladni'schen Klangfiguren als Überlagerung von Grundmoden wieder zurückerhalten.

2.5.3. Schwingende Tasse [Link zu U2-5-03](#)

Mit einer einfachen Kaffeetasse lassen sich interessante Varianten zu Chladnischen Klangfiguren erzeugen. Alles was wir brauchen ist ein Löffel. Schlagen wir die Tasse gegenüber vom Henkel mit dem Löffel an, klingt das so . . . Etwas versetzt vom Henkel klingt es so . . . Hier klingt die Tasse wieder tiefer, und hier wieder höher. Woran kann das liegen? Offenbar ist hierfür der Winkel zwischen der Position des Henkels und dem Anschlagsort des Löffels entscheidend.

Im Bild stehender Wellen können wir das Phänomen verdeutlichen. Am Tassenrand bildet sich eine stehende Welle, im einfachsten Fall entsprechen vier Schwingungsbäuche bzw. zwei Wellenlängen dem Tassenrand. Wenn ein Schwingungsbauch am Henkel entsteht, schwingt mehr Masse, daher wird die Frequenz kleiner und der Klang wird tiefer. Bildet sich am Henkel ein Schwingungsknoten, schwingt weniger Masse, daher wird die Frequenz größer und der Klang wird höher.

Wie können wir diese Theorie beweisen? Dafür benötigen wir eine geeignete Visualisierung dieser stehenden Wellen.

Wir füllen Kaffee in die Tassen. Schlagen wir mit dem Löffel direkt gegenüber vom Henkel an, bildet sich tatsächlich eine stehende Welle mit vier Schwingungsbäuchen, die sich auf der Kaffeeoberfläche ausbreitet. Deutlich zu sehen ist, dass an den vier Schwingungsbäuchen der Tasse besonders viel von dem Kaffee an der Oberfläche

aufgewühlt wird und eine Welle in die Mitte der Tasse läuft. In der Tat befindet sich der Schwingungsbauch an der Position des Henkels.

Wenn wir den Löffel nun um 45 Grad versetzt anschlagen, was passiert dann auf der Oberfläche des Kaffees? Nun, es bildet sich wieder eine stehende Welle mit vier Schwingungsbäuchen, aber an der Position des Henkels ist ganz deutlich zu sehen, dass dort der Schwingungsknoten ist. Damit haben wir eine Erklärung gefunden für das Geheimnis der zwei Töne der schwingenden Tasse. Entweder der Henkel schwingt mit, oder nicht.

Wir betrachten nun das gesamte Spektrum der schwingenden Tasse. Stehende Wellen mit vier Schwingungsbäuchen können in zwei Varianten entstehen, wie wir eben schon gesehen haben. Auf den Tassenrand passen dann genau zwei Wellenlängen, also 2λ . Bei der Schwingung $2\lambda^+$ schwingt der Henkel mit, bei $2\lambda^-$ nicht.

Gibt es noch mehr Frequenzen im Spektrum, und was haben diese zu bedeuten? Eine naheliegende Vermutung ist, dass hier nicht die doppelte Wellenlänge, sondern die dreifache Wellenlänge genau auf den Tassenrand passt. Das würde dann so aussehen. Auch hier kann entweder der Knotenpunkt oder der Schwingungsbauch auf der Position des Henkels liegen. Um diese stehenden Wellen zu erzeugen müssen wir die Tasse an der passenden Stelle anschlagen.

Mit ein bisschen Übung gelingt es tatsächlich, stehende Wellen mit sechs Schwingungsbäuchen zu erzeugen. Beginnen wir mit dem Anschlag des Löffels in 60 Grad relativ zum Henkel. Tatsächlich ergeben sich sechs Schwingungsbäuche am Tassenrand. An der Position des Henkels befindet sich ein Schwingungsbauch.

Wir schlagen im Winkel 30 Grad relativ zum Henkel an. Wieder ergibt sich eine Schwingung mit sechs Schwingungsbäuchen am Tassenrand, aber diesmal befindet sich der Henkel genau zwischen zwei Schwingungsbäuchen und somit am Schwingungsknoten. Das Sechseck ist also um 30 Grad verschoben und die Frequenz ist etwas erhöht.

Somit haben wir das Spektrum der Tasse verstanden. Es ergeben sich Doppel-Peaks jeweils mit zweifacher, dreifacher und mit etwas Mühe sogar auch vierfacher Wellenlänge. Probier's aus, Bob!

2.5.4. *Schwingende Seifenblase* [Link zu U2-5-04](#)

Zur Klassifikation von Spektren in einer Dimension gibt es ein zentrales Merkmal: die Anzahl von Knotenpunkten, wie bei der schwingenden Saite und dem Tassenrand gesehen. Dieses Konzept wollen wir nun auf zweidimensionale Schwingungen übertragen, um Schwingungen auf einer Kugeloberfläche zu untersuchen.

Schwingende Kugeln kann man ganz einfach erzeugen: Seifenblasen. Um die Schwingung sichtbar zu machen, nehmen wir eine Halbkugel. Auf einem Vibrationsgenerator können wir diese Halbkugel zum Schwingen bringen. Die Schwingung sieht meistens ziemlich wackelig und irregulär aus.

Wenn wir die Frequenz, mit der wir die Schwingung anregen, verändern, sehen wir im Fourier-Bild ganz bestimmte Punkte, bei denen sogenannte Resonanzfrequenzen

entstehen. Was hat das zu bedeuten?

Schauen wir uns eine spezielle Resonanzfrequenz an. Wird die Seifenblase mit dieser Frequenz angeregt, ergibt sich eine sehr reguläre, periodische Schwingung. Wir können diese Schwingung mit sich selbst überlagern. Wenn wir dies mit einer halben Periode Zeitversatz machen, dann ergibt sich folgendes Bild. Die Knotenpunkte bleiben konstant und bei den Schwingungsbäuchen ergibt sich jeweils die maximale Auslenkung. Aus Knotenpunkten werden durch Rotation um die vertikale Achse Knotenlinien auf der zweidimensionalen Seifenhaut. Insgesamt erhalten wir fünf Knotenlinien, es gilt: l gleich fünf.

Wie sieht die darauf folgende Resonanzfrequenz aus? Wenn wir die Frequenz passend einstellen, bekommen wir diese reguläre Schwingung. Auch hier können wir wieder die Schwingung mit sich selbst überlagern, mit einer halben Periode Zeitversatz. So können wir wieder die Position der Knotenpunkte und der Schwingungsbäuche ablesen. Aus Knotenpunkten werden Knotenlinien auf der Kugeloberfläche durch Rotation. Insgesamt erhalten wir sieben Knotenlinien.

Das gesamte Spektrum von Resonanzfrequenzen lässt sich durch die Anzahl von Knotenlinien beschreiben. Aus Symmetriegründen kann es nur eine ungerade Anzahl von Knotenlinien geben, da die Schwingung per Konstruktion immer auch ihr eigenes Spiegelbild sein muss.

2.5.5. Kugelflächenfunktion [Link zu U2-5-05](#)

Das Spektrum der schwingenden Saite besteht aus Vielfachen der Grundfrequenz f_0 . Diese einzelnen Schwingungsmoden können wir durch die Anzahl von Knotenpunkten klassifizieren.

Es gibt im Allgemeinen zwei verschiedene Arten von Randbedingungen. Entweder befinden sich am Rand Knotenpunkte, oder Schwingungsbäuche. Physikalisch entspricht dies einem geschlossenen oder einem offenen Ende. Betrachten wir die einfachste Schwingungsmode mit zwei offenen Enden. Diese hat einen Knotenpunkt in der Mitte, und am Rand jeweils Schwingungsbäuche. Wir biegen nun diese Schwingung auf einen Halbkreis. Lassen wir diesen Halbkreis um die z -Achse rotieren, ergibt sich eine Kugel. Auf der schwingenden Kugel ergibt sich eine azimutale Knotenlinie am Äquator.

Dasselbe Spiel können wir mit der folgenden Resonanzfrequenz mit zwei Knotenpunkten machen. Wir biegen die Schwingung auf einen Halbkreis und lassen den Halbkreis wieder um die z -Achse rotieren. Es ergibt sich eine schwingende Kugel mit zwei azimutalen Knotenlinien.

Dies lässt sich nun immer weiter fortsetzen. Die Schwingung mit l Knotenpunkten wird durch Biegen und Drehen zu einer Kugelschwingung mit l Knotenlinien. Per Definition sind diese Schwingungen der Kugel rotationssymmetrisch. Diese Kugelschwingungen sind auch ihr eigenes Spiegelbild: Positionieren wir die Spiegelebene genau in der Mitte, so ergibt sich ein identisches Spiegelbild. Mit l bezeichnen wir die Gesamtzahl von azimutalen Knotenlinien.

Für $l=0$ gibt es keine Knotenlinie. Für $l=1$ gibt es eine, aber diese besonders symmetrische Schwingung ergibt nicht das vollständige Spektrum der Möglichkeiten, denn die Knotenlinie kann auf der Kugel ja auch gedreht werden. Wir drehen die eine Knotenlinie nach rechts, oder im Spiegelbild nach links. Somit ergeben sich zwei neue Schwingungsmoden auf der Kugeloberfläche mit einer Knotenlinie: Schwingungen mit rechts- bzw. linksdrehender azimuthaler Knotenlinie.

Bei zwei Knotenlinien gibt es die Möglichkeit, nicht nur eine, sondern auch zwei Knotenlinien nach rechts zu drehen, im Spiegelbild entsprechend nach links.

Bei drei Knotenlinien kann man erst eine, dann zwei, oder alle drei Knotenlinien nach rechts drehen, im Spiegelbild entsprechend nach links.

Insgesamt ergeben sich also auf der Kugeloberfläche $(2l + 1)$ mögliche Schwingungsmoden mit l Knotenlinien. Ausgehend von der einfachsten Schwingung lassen sich durch Hinzufügen von weiteren Knotenlinien und deren Drehungen alle möglichen Grundmoden auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche erzeugen.

2.6. Vom Planck'schen Wirkungsquantum als Knotenlinienquant (U2-6)

In dieser Station diskutieren wir den Übergang von direkt beobachtbaren stehenden Wellen zu Quantenzuständen.

2.6.1. Kerze und Spiegel [Link zu U2-6-01](#)

Jetzt geht Bob ein Licht auf! Wir könnten hier auch über die Echtheit von Bobs Haaren spekulieren, denn nichts ist, wie es scheint: In dieser Station betreten wir durch diesen Quantenspiegel hindurch erstmals die Quantendimension.

Mit im Gepäck bleiben von den klassischen Schwingungszuständen aus den vorherigen Stationen nur die Muster aus Knotenpunkten und Knotenlinien, quasi als Skelett der Null. Die materielle, schwingende Substanz geht verloren und erstet neu als komplexe Wellenfunktion.

2.6.2. Drehoperator [Link zu U2-6-02](#)

Mit einfachen Drehoperationen gelingt es uns, alle möglichen Schwingungsmoden auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche zu erzeugen, indem wir die Gesamtzahl l von azimuthalen Knotenlinien durch geeignete Drehoperationen in m rechts- bzw. linksdrehende Knotenlinien umwandeln. Da wir eine Kugel mit festem Radius betrachten, spielen radiale Knotenlinien bei diesen Überlegungen keine Rolle.

Werfen wir einen genaueren Blick auf die Drehoperatoren. Ein Operator manipuliert Eigenschaften eines Zustands. Ein Zustand ist allgemein ein komplexer Gegenstand mit vielen verschiedenen Eigenschaften. Dabei könnte es sich auch um eine Banane handeln. Bezeichnen wir den Zustand mit B . Der Zustand "Banane" hat viele verschiedene Eigenschaften, wie z. B. Form, Farbe, Geschmack und natürlich kann man die Banane auch drehen.

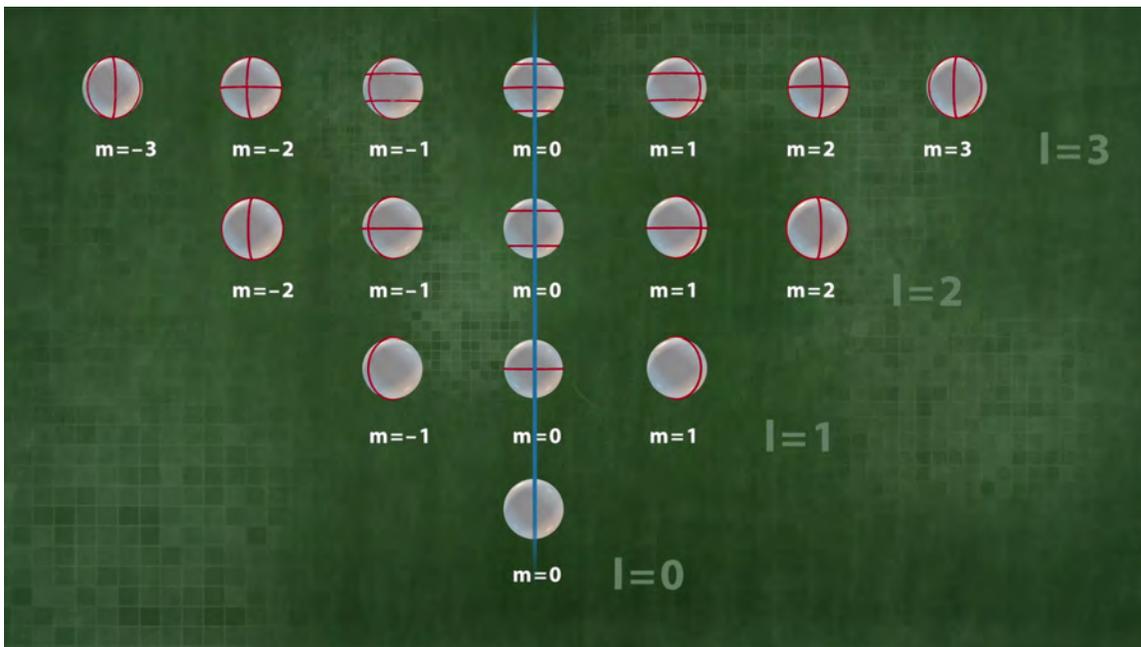


Figure 18. Die Drehimpulsquantenzahl zählt die Gesamtzahl azimuthaler Knotenlinien, m bestimmt deren Anordnung auf der Kugeloberfläche.

In drei Dimensionen gibt es drei verschiedene Drehachsen: Die x - y - oder z -Achse. Der Drehoperator D manipuliert ausschließlich die Dreieigenschaft der Banane. Nur weil wir sie zum Beispiel um 90 Grad um die z -Achse drehen, verändert die Banane nicht ihren Geschmack, oder?

Wir können auch mehrere Drehungen nacheinander durchführen, z. B. erst eine 90° Drehung um die z -Achse und dann eine 90° Drehung um die y -Achse. Die Banane steht nicht mehr, sie liegt auf dem Rücken.

Bei den Drehoperationen gibt es eine Besonderheit, denn führen wir dieselben Drehoperationen in umgekehrter Reihenfolge durch, also erst eine Drehung um die y -Achse und dann um die z -Achse, ergibt sich bei identischem Ausgangszustand ein anderer Endzustand der Banane. Die Banane liegt nicht mehr auf dem Rücken, sondern auf der Seite. Die Drehoperationen kommutieren nicht, das heißt, die Reihenfolge der Anwendung spielt eine entscheidende Rolle.

Betrachten wir nun einen etwas anderen Zustand: eine um die z -Achse rotierende Banane, die wir mit R_z -B bezeichnen. Die Anwendung eines Drehoperators um die Rotationsachse der Banane ändert den Zustand nicht, es liegt ein sogenannter Eigenzustand vor. Allgemein gesprochen ändert sich der Eigenzustand nicht durch Anwendung des zugehörigen Operators.

Aber Vorsicht! Nur der Drehoperator, der um die vorgegebene Rotationsachse des Zustands eine zusätzliche Drehung ausführt, ändert den Zustand nicht! Eine Drehung um die falsche Achse ändert den Zustand sehr wohl! Bob ist also nur Eigenzustand bezüglich Drehung um die Z -Achse... bzw. war Eigenzustand...

2.6.3. Spektrum des Drehoperators [Link zu U2-6-03](#)

Wir wollen das Spektrum des Drehoperators, also den kompletten Satz seiner Eigenzustände in drei Dimensionen, nun genauer untersuchen. Dafür wählen wir als Beispiel $l = 2$. Der symmetrischste Zustand, $m = 0$, ist komplett rotationsinvariant. Dieser Zustand ändert sich bei Drehung um die z-Achse mit beliebigem Winkel α überhaupt nicht, und ist somit offensichtlich ein Eigenzustand bezüglich des Operators $D_z(\alpha)$ mit Eigenwert Eins.

Aber wie sieht es aus für $m = 1$? Dieser Zustand dreht sich selbst um die z-Achse, eine einmalige, zusätzliche Drehung um einen festen Winkel Alpha ändert also nur die Phase der Drehung dieses Zustands, nicht den Zustand als solches. Es ist also auch ein Eigenzustand des Operators $D_z(\alpha)$. Der Eigenwert ist $e^{i\alpha}$, wenn um den Winkel α gedreht wird. Dies gilt für alle m . Alle hier gezeigten Zustände sind also Eigenzustände des Drehoperators um die z-Achse.

Wenn wir aber einen dieser Zustände, z.B. $m=0$, um die y-Achse drehen, dann ändert sich der Zustand; es ist also kein Eigenzustand bezüglich des Operators "Drehung um die y-Achse". Dies gilt ebenfalls für alle m .

Fassen wir zusammen: Die Schwingungen auf der Kugeloberfläche in drei Dimensionen lassen sich durch die Anzahl l von azimutalen Knotenlinien klassifizieren. So ergeben sich alle möglichen reellen Eigenzustände des Drehoperators um die z-Achse. Eigenzustände lassen sich nur bezüglich Drehungen um eine Drehachse konstruieren, hier wählen wir die z-Achse. Diese Schwingungszustände auf der Kugel sind also nicht Eigenzustände bezüglich der Drehungen um die x- oder y-Achse. Aus diesen beiden Drehoperatoren D_x, D_y lassen sich aber zwei wichtige, neue Operatoren kombinieren, die sogenannten Knotendrehoperatoren. Deren Funktion beschreiben wir im nächsten Slide.

2.6.4. Quantenspiegel [Link zu U2-6-04](#)

Kerzen und Spiegel stehen als Sinnbild für Zustände und Operatoren. Besonders symmetrische Zustände sind ihr eigenes Spiegelbild; sie befinden sich genau in der Mitte und teilen die Spiegelebene. Alle anderen Zustände werden nicht auf sich selbst gespiegelt, sondern treten paarweise auf. In diesem Fall kann nur eine ungerade Anzahl von Zuständen existieren - einer - drei - fünf - und so weiter. Schauen wir uns den Fall von sieben Zuständen einmal genauer an. Hier haben wir insgesamt $l=3$ azimutale Knotenlinien - im symmetrischsten Fall drei waagerechte. Die Knotendrehoperatoren drehen eine waagerechte Knotenlinie in die Senkrechte und erzeugen aus dem Zustand $m = 0$ den Zustand $m = +1$ mit einer rechtsdrehenden Knotenlinie; im Spiegelbild $m = -1$ mit einer linksdrehenden Knotenlinie. Nochmaliges Anwenden des Knotendrehoperators dreht noch eine Knotenlinie aus der Waagerechten in die Senkrechte. Nochmaliges Anwenden führt zu den Zuständen, bei denen alle Knotenlinien sich rechts, bzw. links um die z-Achse drehen. Mehr waagerechte Knotenlinien gibt es nicht - eine weitere Anwendung der Knotendrehoperatoren führt zur

Null. Damit haben wir alle möglichen Schwingungszustände auf der Kugeloberfläche in drei Dimensionen verstanden. Wir können sie klassifizieren bezüglich des D_z -Operators, zu dem alle hier gezeigten Zustände Eigenzustände sind. Die Knotendrehoperatoren d^\pm drehen Knotenlinien aus der waagerechten in die Senkrechte und erzeugen so aus dem Zustand m den Zustand m plus eins bzw. m minus eins. Ausgehend von den symmetrischsten Eigenzuständen des D_z Operators auf der Spiegelebene ergeben sich alle weiteren Eigenzustände durch das Anwenden der Knotendrehoperatoren. In dem bis hier her gezeigten Bild von Operatoren und Zuständen auf der Kugeloberfläche gibt es noch einen freien Parameter. Verändern wir den Abstand zwischen den Zuständen und deren Spiegelbildern, bleibt alles andere wie gehabt bestehen. Wir können diesen Abstand also beliebig wählen, ohne die Symmetrie zwischen den Eigenzuständen zu zerstören.

Für klassische Operatoren auf der Kugeloberfläche hat dieser Abstand Δ keine tiefere Bedeutung und ist je nach Anwendung unterschiedlich. In der Quantenphysik liegt hier des Pudels Kern: Dieser Abstand ist eine universelle Naturkonstante: \hbar quer, also $\simeq 10^{-34} Js$. Dieser Wert ist absolut unveränderlich und gilt auf der Erde genauso wie im Sonnenkern oder in einem Schwarzen Loch. Beim Übergang zur Quantenphysik werden die Operatoren also "nur" skaliert, die eigentliche Schwierigkeit für die Physik liegt eher in der Interpretation dieser Skalierung als in der mathematischen Struktur.

Vergleichen wir Operatoren und Zustände auf der Kugeloberfläche in der Quantenphysik und im klassischen Fall. Bei der Quantenphysik ist der Abstand zwischen den Zuständen eine universellen Naturkonstante, im klassischen Fall beliebig. Wie sieht es mit den Zuständen aus? In beiden Fällen können die Eigenzustände als Schwingungen auf der Kugeloberfläche, und somit durch Anzahl und Position von Knotenlinien klassifiziert werden. Hier der Fall $l = 2, m = 0$. Aber es gibt einen entscheidenden Unterschied: In der klassischen Physik sind die Schwingungszustände direkt beobachtbare, reale Schwingungen auf einer Kugeloberfläche, wie z. B. eine schwingende Seifenhaut. In der Quantenphysik handelt es sich um eine nicht direkt beobachtbare Schwingung, die wir als Wurzel aus einer Wahrscheinlichkeit, bzw. als Wellenfunktion interpretieren können - aber nicht zwangsläufig müssen. Schneiden wir die Kugel auf, erhalten wir im klassischen Fall die Schwingung auf einer Kreislinie zurück - aber in der Quantendimension erhalten wir einen Ausschnitt aus einer komplexen Wellenfunktion. Die Operatoren L_z, L^\pm tragen aus historischen Gründen in der Quantenmechanik den Namen Drehimpulsoperatoren. Mehr Gemeinsamkeiten als die physikalische Einheit Joulesekunde haben diese Operatoren mit dem klassischen Drehimpuls aber nur in sehr wenigen Spezialfällen.

2.7. Vom Spiegel in der Mitte (U2-7)

Eine kleine Verschiebung des Quantenspiegels bewirkt einen großen Sprung in eine neue Dimension.

2.7.1. *Spiegel-Spuk* [Link zu U2-7-01](#)

Alice und Bob spiegeln sich in der Schachbrett-Bar. Die schwarzen und weißen Felder symbolisieren Null und Eins, also die digitale Daten, mit denen wir täglich unsere mediale Wirklichkeit erschaffen. Im Quantenspiegel öffnet sich die Welt hinter der digitalen Welt: Eine einzelne Kerze und dessen Spiegelbild symbolisieren das einfachste mögliche Quantensystem, die Verallgemeinerung des Bits auf das Qubit.

2.7.2. *Spin* [Link zu U2-7-02](#)

Im Bild von Kerze und Spiegel als Metapher für Zustände und Operatoren gibt es neben dem Abstand zwischen den Zuständen noch eine weitere Möglichkeit, das Bild zu manipulieren: Die Position der Spiegelebene. Der Spiegel muss Zustände wieder auf andere Zustände abbilden, und der Abstand zwischen den Zuständen muss immer gleich groß sein. Dafür gibt es genau zwei mögliche Lösungen. Eine kennen wir schon: Ist ein Zustand sein eigenes Spiegelbild, gibt es immer eine ungerade Anzahl von Zuständen.

Befindet sich der Spiegel genau in der Mitte zwischen zwei Zuständen, ergibt sich eine gerade Anzahl von Zuständen, und kein Zustand ist sein eigenes Spiegelbild. Im einfachsten Fall gibt es also zwei Zustände. Der Übergang zur Quantenphysik erfolgt wiederum durch Skalieren des Abstandes zwischen den Zuständen zu h quer. Diese beiden Zustände haben eine wichtige Interpretation: Sie können beispielsweise den Spin des Elektrons beschreiben: Spin up und Spin down, mit Plus einhalb und Minus einhalb in Einheiten von h quer. Welchen Schwingungsmoden entsprechen diese beiden Zustände? Schwingungen auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche können es nicht sein, diese haben wir ja schon vollständig klassifiziert. Nein, hier passiert etwas Neues. Mathematisch lässt sich zeigen, dass es sich hierbei im einfachsten Fall um Schwingungen auf einer dreidimensionalen Kugeloberfläche in vier Dimensionen handelt. Geometrisch ist diese Kugeloberfläche ein komplexes Objekt. In der Quantenphysik ist ein solcher Zustand in vier Dimensionen möglich, weil er nicht direkt beobachtbar ist und nur indirekte Auswirkungen hat.

In der klassischen Physik ist so ein Zustand schlicht nicht möglich, weil direkt beobachtbare Schwingungsmoden in vier Dimensionen leider nicht existieren. Der Spin ist das erste und zugleich wichtigste Beispiel für einen Zustand, der nicht im realen Raum existieren kann und darum ein rein quantenmechanisches Phänomen ist. Was wir davon mitbekommen, ist sozusagen eine Projektion in die realen drei Dimensionen. Die z -Achse bezeichnen wir jetzt wie üblich von unten nach oben. Im Bezug auf diese zeigt der Zustand up nach oben, und der Zustand down nach unten. Wir können die dreidimensionale Kugeloberfläche auf eine gewöhnliche, zweidimensionale Kugeloberfläche projizieren. Dort entsprechen dem Nord- und Südpol die Zustände Spin up und Spin down. Neben diesen beiden Basiszuständen der Spins gibt es auch noch Überlagerungsmöglichkeiten, also Superpositionszustände dieser Schwingungen, zum Beispiel Spin up plus Spin down, oder Spin up minus Spin down. Geometrisch entspricht das einem Spin, der in die plus y oder minus y -Richtung zeigt. Analog lässt sich der

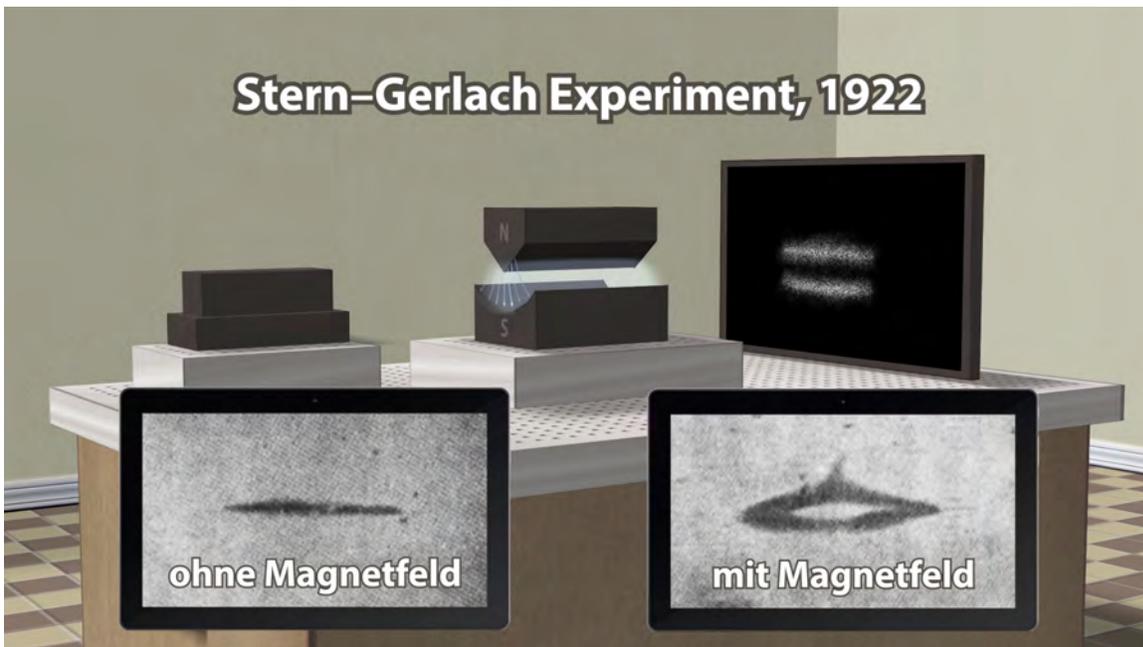


Figure 19. Das Stern-Gerlach Experiment.

Spin in plus x oder minus x -Richtung konstruieren. Der Spin im dreidimensionalen Raum kann also in jede beliebige Richtung zeigen, hier durch die Richtung des großen roten Pfeils gezeigt. Jeder Punkt auf der Kugel entspricht dem Spinzustand, der in diese Raumrichtung weist. Alle möglichen Spinausrichtungen dieses sogenannten Qubits ergeben eine zweidimensionale Kugeloberfläche, die sogenannte Bloch-Kugel.

2.7.3. Stern-Gerlach Experiment [Link zu U2-7-03](#)

Der erste experimentelle Nachweis des faszinierenden Freiheitsgrades des Elektron-Spins war das Stern-Gerlach-Experiment aus dem Jahr 1922. In einem Atomstrahlrohr wurde ein Strahl von Silberatomen erzeugt, und in Richtung eines inhomogenen Magnetfelds geschickt. Klassisch würde man erwarten, dass die magnetischen Momente der Silberatome zufällig ausgerichtet sind und in dem inhomogenen Magnetfeld je nach Ausrichtung unterschiedlich stark abgelenkt werden.

Tatsächlich beobachtet worden ist aber eine Aufspaltung in nur zwei mögliche Zustände, die später als Spin up und Spin down bezeichnet wurden. Wie können wir das erklären? Betrachten wir zunächst die Elektronenkonfiguration. Im Silberatom gibt es insgesamt 47 Elektronen. Bei 46 dieser Elektronen sind Spin up und Spin down jeweils gepaart und neutralisieren sich. Nur der Spin des 5s Elektrons ist ungepaart, und befindet sich entweder im Spin up, oder im Spin down Zustand - oder in einem beliebigen Superpositionszustand dieser beiden. Wir können also diesen Spinzustand auf der Blochkugel beschreiben. Der Spin kann in jede beliebige Richtung zeigen. Die Spins aller Silberatome sind zufällig verteilt und somit unpolarisiert. Tatsächlich besteht eine

enge Verbindung zwischen diesem Experiment mit einzelnen Elektron-Spins und dem Experiment mit einzelnen polarisierten Photonen. Der Polarisationsfilter entspricht hier dem inhomogenen Magnetfeld. Und genau wie bei den Photonen entscheidet bei einem einzelnen Experiment der Zufall, ob der Spin sich in Richtung des Polarisationsfilters oder entgegengesetzt der Richtung des Polarisationsfilters ausrichtet. Es ergibt sich somit ein schwarz-weiß Zufallsmuster. Schauen wir uns den quantenmechanischen Messprozess im Bild der Blochkugel einmal genauer an. Vor der Wechselwirkung mit dem inhomogenen Magnetfeld hat der Spin irgendeine beliebige Ausrichtung. Das inhomogene Magnetfeld wirkt wie ein Filter, hier dargestellt als Schlitz. Er zwingt den Spin, sich zufällig entweder in oder entgegengesetzt der Richtung des inhomogenen Magnetfeldes auszurichten. Ist der Ausgangszustand nahe bei "up", ist das Umklappen in den Zustand "down" sehr unwahrscheinlich, aber nicht unmöglich. In ihrem historischen Experiment konnten Stern und Gerlach noch nicht einzelne Silberatome erzeugen und somit nicht den Zufall beim einzelnen Experiment nachweisen, aber sie haben als erste die Quantisierung oder Aufspaltung des Spins in "up" oder "down" nachgewiesen. Ein sensationelles Ergebnis für ihre Zeit.

2.8. Von Bohr zur Quantendimension (U2-8)

In dieser Station vergleichen wir das Bohr'sche Atommodell mit dem Modell der Quantenspiegelungen und zeigen, wie das Zählen von Knotenlinien von Quantenzuständen dazu beitragen kann, den Aufbau des Periodensystems zu verstehen.

2.8.1. Treppenstufen [Link zu U2-8-01](#)

Alice und Bob steigen die Treppenstufen hinunter. Die Kerzen und deren Spiegelbilder sind entlang dieser Energiestufen angeordnet. In dieser zentralen Station läuft das drehende Rad auf Hochtouren: Unser Weg führt über historische Experimente zu atomaren Spektren und ersten Atommodellen, bis zur Darstellung aller Elemente des Periodensystems auf der Quantenorgel.

2.8.2. Atomare Spektren [Link zu U2-8-02](#)

Sir Isaak Newton hat mit Hilfe eines Prismas weißes Licht in die Spektralfarben zerlegt. So ein ähnliches Experiment haben wir hier auch aufgebaut. Das weiße Licht trifft auf das Prisma, hier wird das Licht in die Regenbogenfarben aufgefächert, aus denen das weiße Licht besteht. Wählen wir als Lichtquelle allerdings ein bestimmtes Gas - hier Neon, erscheinen nur ganz bestimmte Spektrallinien. Aus diesem Grund ist das Licht der Neonröhre nicht weiß, sondern gelblich orange. Beim Helium ergeben sich andere und bei Wasserstoff wiederum andere Linien, hier nur vier im sichtbaren Bereich. Joseph von Fraunhofer hat mit einem ähnlichen Aufbau das Spektrum von Sonnenlicht untersucht. Er entdeckte schwarze Linien im Farbspektrum – die wir heute Fraunhofer-Linien nennen. Offenbar werden ganz bestimmte Frequenzen aus dem

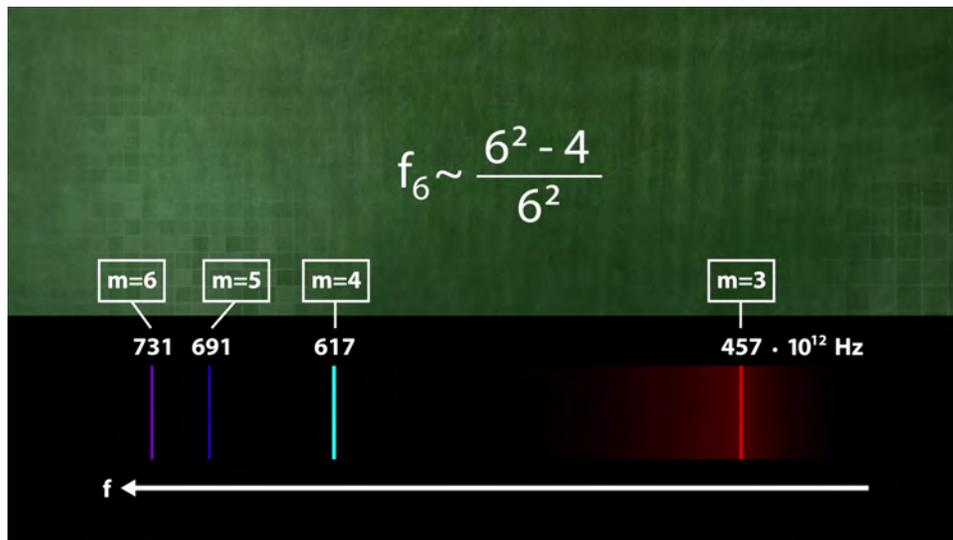


Figure 20. Balmer hat als erster eine heuristische mathematische Formel für die gemessenen Emissionslinien des H-Atoms gegeben

Spektrum des Sonnenlichts auf dem Weg zu uns absorbiert. Emissionsspektren sind charakteristisch für das jeweilige Element, ähnlich Fingerabdrücken. Wir können also aus den schwarzen Absorptionslinien folgern, welche Elemente auf der Sonnenoberfläche vorkommen. Auf diese Weise wurde Ende des 19. Jahrhunderts das Element Helium auf der Sonnenoberfläche entdeckt. Heutzutage können wir die Sonne in unterschiedlichen Wellenlängen bzw. Spektralbereichen direkt aus dem Weltraum beobachten.

Nach der Entdeckung der Spektrallinien, die als Fingerabdruck und charakteristische Eigenschaft jedes Elements vermessen werden können, stellt sich die offensichtliche Frage, was die Ursache für diese Spektren ist. Die wichtigsten Meilensteine bis zur heutigen Erklärung durch die Quantenphysik diskutieren wir in den nächsten Slides.

2.8.3. Balmer-Formel [Link zu U2-8-03](#)

Die vier sichtbaren Linien des Wasserstoffspektrums entsprechen elektromagnetischen Schwingungen, deren Frequenzen in der Größenordnung von einer Millionen mal einer Milliarde Schwingungen pro Sekunde liegen, nämlich 731, 691, 617 und 457 mal 10^{12} Hz. Gemessen wurde dies bereits 1862 von Anders Jonas Angström, theoretisch verstanden aber noch nicht.

Wie können wir dieses Spektrum mathematisch beschreiben? Dafür brauchen wir erst einmal eine Idee. Der Schweizer Lehrer Johann Jakob Balmer hatte vorgeschlagen, natürliche Zahlen m in der Formel zu verwenden, vielleicht in Analogie zum Spektrum der Gitarrensaiten, wo ja auch das Vielfache, also m mal eine Grundfrequenz vorkommt. Wir könnten also jeder dieser Frequenzen natürliche Zahlen zuordnen und ausprobieren, ob wir damit erfolgreich eine Formel konstruieren können. Niemand weiß mehr, wie Balmer auf seine Formel gekommen ist. Er fand heraus, dass die Kombination

$(m^2 - 4)/m^2$ alle Frequenzverhältnisse korrekt beschreiben kann, wenn für m drei, vier, fünf und sechs gewählt wird.

Diese Formel wurde von Rydberg umgeschrieben als Differenz von eins durch zwei quadrate minus eins durch m Quadrat. Rydberg ordnete also ZWEI natürliche Zahlen jeder Frequenz zu, hier 2 nach 3, 2 nach 4, 2 nach 5 und 2 nach 6. Mit der Rydberg-Konstanten kann man so die Zahlen 457 mal 10^{12} , 617 mal 10^{12} , 691 mal 10^{12} , und 731 mal 10^{12} erhalten.

Johannes Rydberg hat diese Formel für beliebiges m und n erweitert. Es ergeben sich Vorhersagen für weitere Frequenzen im Wasserstoff, die nicht im sichtbaren Spektralbereich liegen. Mit dieser Vorhersage traf er ins Schwarze.

2.8.4. Rutherford-Streuung [Link zu U2-8-04](#)

Wenn wir das Spektrum von Atomen verstehen wollen, müssen wir erst einmal wissen, wie das Atom überhaupt aufgebaut ist. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts war schon bekannt, dass Atome aus positiven und negativen Ladungen bestehen, aber es war noch nicht klar, wie es im Inneren des Atoms aussieht. Sind die negativen und die positiven Ladungen homogen verteilt, oder befinden sich die Negativen außen und die Positiven innen und wenn ja, wie weit sind sie voneinander entfernt?

Über diese Fragen kann man philosophieren soviel man will, letztlich herausfinden kann man es nur durch ein Experiment. Entscheidend war das geniale Experiment von Rutherford. Zu seiner Zeit war gerade die Radioaktivität entdeckt worden, und ein Alpha-Strahler, also schnelle Helium-Atomkerne, die von radioaktivem Radium emittiert werden, standen zur Verfügung. Rutherford wählte sozusagen als Zielscheibe für die schnellen Alpha-Teilchen eine Goldfolie, die extrem dünn war, also nur aus wenigen Atomlagen bestand. Um zu messen, wie die Alphateilchen in der Goldfolie abgelenkt werden, verwendete Rutherford Szintillations-Schirme, die beim Auftreffen des Alphateilchens in kompletter Dunkelheit winzige Lichtblitze erzeugten.

Durch die Detektion der gestreuten Alpha-Teilchen in allen Winkeln lässt sich etwas über den Aufbau des Goldatoms herausfinden. Es zeigte sich, dass fast alle Goldatome ungestreut durch die Goldfolie hindurchgingen. Ein unerwartetes Ergebnis: Nur sehr wenige alpha-Teilchen wurden durch die Goldfolie gestreut. Manche aber erstaunlich stark. Was hatte das zu bedeuten? Elektronen sind sehr leicht und stellen für die Alphateilchen effektiv kein Hindernis dar. Das Alphateilchen bewegt sich praktisch ungestört weiter. Nur die schweren, positiv geladenen Atomkerne stellen ein Hindernis für die Alphateilchen dar. Die Atomkerne müssen offenbar erstaunlich klein sein, weil sonst ja viel mehr Alphateilchen abgelenkt werden müssten. Durch die Abstoßung der positiven Ladungen ergeben sich Hyperbelbahnen, die umso stärker gekrümmt sind, je näher das Alphateilchen auf den Atomkern trifft.

Jeder Abstand des alpha-Teilchens zum Atomkern ist gleich wahrscheinlich. Das heißt, diejenigen Alphateilchen, die ganz nah am Atomkern sind und am stärksten gestreut werden, kommen genauso oft vor wie die, die ein bisschen weniger nah dran

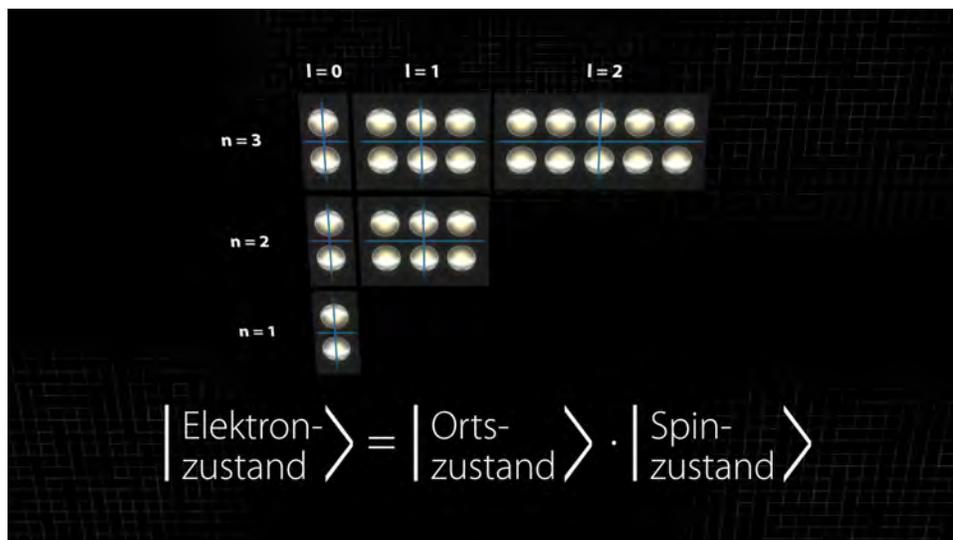


Figure 21. Visualisierung der Beziehung zwischen den vier Quantenzahlen n, l, m, s im Atommodell. Der Spin s verdoppelt die Zustände jeweils durch die waagerechte Spiegelebene. Die Quantenzahl m zählt in jedem "Block" von $-l$ nach $+l$. Insgesamt ergeben sich $2n^2$ Zustände pro Hauptquantenzahl n . Die Oktettregel aus der Chemie entspricht den $2 + 6 = 8$ Elektronenzuständen bei $n = 2$.

sind und weniger stark gestreut werden, oder noch weiter weg und noch weniger gestreut werden, und so weiter. Aus der Form der Hyperbelbahnen folgte bereits, dass größere Streuwinkel sehr viel unwahrscheinlicher sind als kleinere. Die allermeisten Alphateilchen sind weit weg vom winzigen Atomkern und werden in ihrer Hyperbelbahn fast nicht gekrümmt, kommen also direkt durch die Goldfolie durch. Diese Erklärung gilt aber nur, solange sich der Atomkern nur durch seine elektrische Abstoßung, also die Coulombkraft, bemerkbar macht. Je größer der Streuwinkel, desto näher kommt das Alpha-Teilchen an den Atomkern heran. Erst wenn tatsächlich die Kernkraft, also eine neue Kraft, mit ins Spiel kommt, ergibt sich eine Abweichung von der Hyperbelbahn. Rutherford konnte immerhin schon eine Grenze angeben, ab der solche Abweichungen auftreten, und aus dem entsprechenden Streuwinkel auf die Größenordnung des Atomkernes schließen. Diese liegt bei $10^{-15}m$. Damit wissen wir also, dass das Atom fast leer ist: Die Atomhülle ist etwa hunderttausendmal größer als der Atomkern. Damit ist auch klar, dass die Bindungsenergie durch die Kernkraft mehr als hunderttausendmal größer sein muss als die Coulombenergie, da der positiv geladene Atomkern sonst auseinanderbrechen müsste.

Wäre das Atom so groß wie ein Fußballstadion, würden sich die Elektron-Orbits in den Zuschauerrängen befinden und der Atomkern wäre in etwa so groß wie eine Stecknadel.

2.8.5. Bohrsches Atommodell [Link zu U2-8-05](#)

Im Jahr 1913 hat Niels Bohr sein berühmtes Atommodell aufgestellt. Laut diesem

Modell gibt es nur bestimmte erlaubte Bahnen, auf denen sich das Elektron bewegen kann. Doch der Reihe nach. Wie in einem Rezeptbuch hat Bohr die ihm zur Verfügung stehenden Wissensbausteine seiner Zeit zusammengesetzt.

Von Rutherfords Streuexperiment an der Goldfolie wissen wir, dass der Atomkern winzig ist im Vergleich zur Atomhülle, in der sich das Elektron befindet. Aber wie bewegt sich das Elektron? Eine naive Vorstellung wäre die eines planetenähnlichen Systems. Der Atomkern entspricht der Sonne, das Elektron dem Planeten, der durch die elektrische Anziehung auf einer Kreisbahn gehalten wird. Das Problem hierbei ist, dass eine beschleunigte Ladung wie eine Antenne strahlen müsste. Das Elektron würde Energie verlieren und schließlich in den Atomkern hineinstürzen. Klassisch gesehen wäre so ein Atom instabil! Bohr konnte nicht erklären, warum das Atom stabil ist, er hat es postuliert: Bohr nimmt an, dass nur bestimmte, diskrete Bahnen für das Elektron erlaubt sind. Daraus folgt aber, dass nur bestimmte diskrete elektromagnetische Strahlungsübergänge erlaubt sind. Es wird Strahlung frei, wenn das Elektron in eine tiefere Bahn hüpf. Befindet sich das Elektron auf der innersten Bahn, ist der sogenannte Grundzustand erreicht.

Die erlaubten Bahnen sind laut Bohr charakterisiert durch den Drehimpuls: Der Drehimpuls muss ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquantums h quer sein. Wie sieht es mit der Energie des Elektrons aus? Allgemein gesprochen ist ein gebundener Zustand durch negative Energie charakterisiert. Erst wenn diese sogenannte Bindungsenergie überwunden wird, hat das Elektron positive Energie und kann entkommen - das Atom ist dann ionisiert. Wir betrachten aber die gebundenen Zustände, insbesondere den Grundzustand, also die innerste Bahn mit $n = 1$. Die nächste Bahn $n = 2$ hat höhere Energie, die Bahn $n = 3$ hat wieder mehr Energie, und so weiter. Bei den Übergängen, bei denen elektromagnetische Strahlung frei wird, können wir uns jetzt an Rydbergs Verallgemeinerung von Balmers Formel erinnern. Die Differenz zwischen den Zahlen n und m können wir als Energiedifferenz neu interpretieren - z. B. zwischen der Schale drei und der Schale zwei. Damit hat Bohr eine geniale Deutung von Rydbergs Resultat gefunden. Durch Bohrs Postulat diskreter Bahnen lässt sich also das diskrete Absorptions- und Emissionsspektrum neu deuten. Beim Übergang beispielsweise von der Schale 3 nach 2 im Wasserstoff wird ein Photon frei - umgekehrt, wenn es von 2 nach 3 angehoben wird, wird ein Photon dieser Frequenz absorbiert. Das absorbierte oder emittierte Licht entspricht in jedem Fall der Energiedifferenz zwischen zwei erlaubten Energieniveaus im Atom. Bohrs Postulat bestimmter erlaubter Bahnen für das Elektron ermöglicht es zu erklären, warum nur bestimmte Emissions- und Absorptions-energien von Photonen im Atom möglich sind. Warum aber nur diese Elektronenbahnen erlaubt sind, konnte Bohr nicht erklären.

Ein Schritt in diese Richtung wurde später durch Louis de Broglie gelegt, der Welleneigenschaften für Materie, insbesondere also auch für Elektronen postuliert hat. Somit kann man das Elektron nicht als ein rechts oder linkslaufendes Teilchen, sondern als rechts- und links laufende Wellen verstehen, die sich überlagern. Bei dieser Überlagerung kann sich eine stehende Welle bilden, aber diese stehende Welle braucht

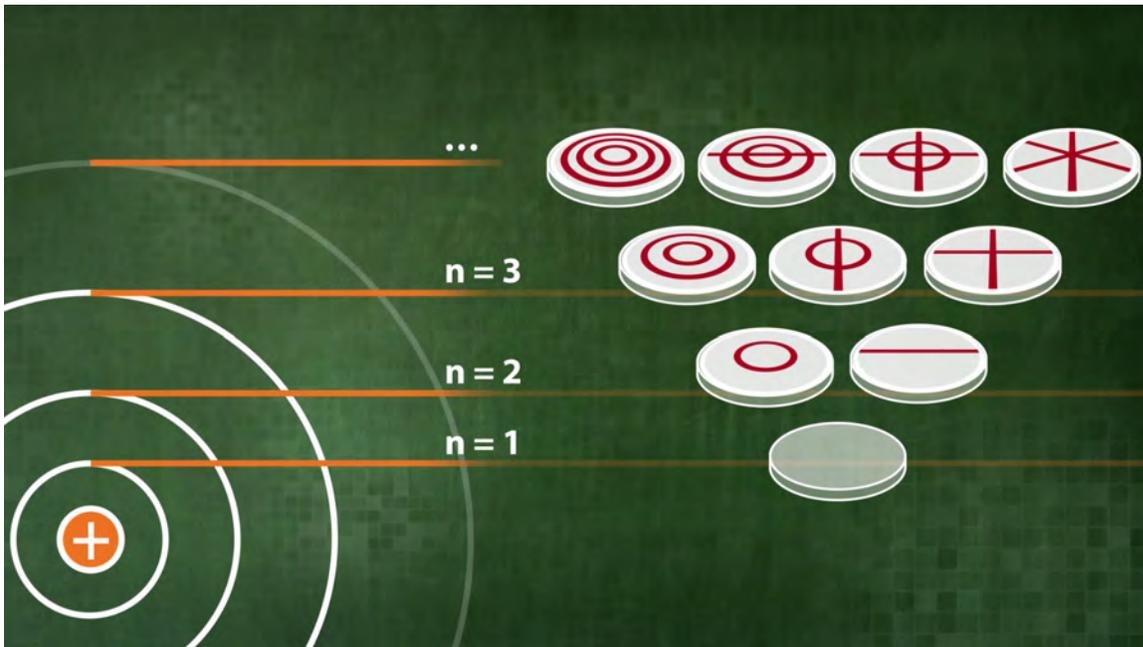


Figure 22. Die s/p/d Orbitale werden durch die Anzahl $l = 0, 1, 2$ azimuthaler Knotenlinien definiert.

bestimmte konstruktive Interferenzbedingungen. Gemäß de Broglie wird jedem Impuls p eine Wellenlänge λ zugeordnet. Konstruktive Interferenz zwischen rechts- und linkslaufenden Wellen ergibt sich, wenn ein Vielfaches dieser Wellenlänge gleich dem Kreisumfang ist, also $2\pi r$ gleich l mal λ , hier im Beispiel für $l = 2$. Durch diese revolutionäre Idee lässt sich das Bohr'sche Postulat als Bedingung für stehende Wellen deuten.

Der nächste Schritt in Richtung Quantenphysik ist die Frage, was denn dieses schwingende Etwas, was das Elektron irgendwie beschreibt, sein soll - insbesondere, in wieviel Dimensionen es schwingt. Zweidimensional wie im Bohr'schen Atommodell ist die stehende Welle bestimmt nicht. Dreidimensional ist sie mindestens, aber das ist erst der Anfang, der Aufbruch in die Quantendimension.

2.8.6. Zustände und Operationen beim H-Atom [Link zu U2-8-06](#)

Seit Entwicklung des Bohr'schen Atom-Modells sind mehr 100 Jahre vergangen, in denen sich die Quantenphysik weiterentwickelt hat. Eine wichtige Weiterentwicklung im Vergleich zum Bohr'schen Atom-Modell ist die Einführung von Operatoren und Zuständen zur Beschreibung und Manipulation des Elektrons in der Quantendimension. Wie hängen diese beiden Beschreibungen miteinander zusammen? Eine erste Weiterentwicklung des Bohr'schen Atommodells erfolgte durch De Broglie (Aussprache), der den Elektronenbahnen stehende Wellen zugeordnet hatte. Hier zeigen wir den Fall $l = 2$. Entsprechend gibt es in der Quantendimension Ortszustände des Elektrons mit zwei Knotenlinien. Das Postulat $L = n\hbar$ wird in der Quantenphysik neu gedeutet:

Der Drehimpuls wird zum Drehoperator. Als Basis für die Elektronenzustände wählen wir Eigenzustände bezüglich des Drehoperators um die z-Achse. $L = n\hbar$ lässt sich in der Quantenphysik nicht mehr so halten. Allgemeine Superpositionszustände haben keinen definierten Drehimpuls, sondern nur die entsprechenden Eigenzustände! Daher ist \hbar der kleinstmögliche messbare Unterschied des Drehimpulses. Um die Quantenzustände zu verstehen, ist es hilfreich, zunächst klassische Schwingungszustände und Operatoren zu untersuchen. Unter allen möglichen Schwingungszuständen auf einer Scheibe betrachten wir hier die Eigenzustände des Energieoperators. Diese haben zwei Arten von Knotenlinien - radial oder azimuthal, oder Kombinationen aus beiden. Diese Grundsicherungen helfen uns beim Verständnis der entsprechenden Quantenzustände - auch wenn wir prinzipiell niemals erkennen können, wie diese Zustände tatsächlich beschaffen sind.

In jeder Bahn $n = 1, 2, 3$ usw. haben die Schwingungszustände im Wasserstoff in etwa gleiche Bindungsenergie, das heißt, sie haben gleich viele Knotenlinien. In der innersten Bahn $n=1$ haben wir überhaupt keine Knotenlinien. Danach kommt $n=2$ mit einer Knotenlinie, entweder radial oder azimuthal. Danach kommt die dritte Bahn, $n=3$ mit zwei Knotenlinien, also entweder zwei radiale, eine radiale und eine azimuthale, oder zwei azimuthale Knotenlinien, entsprechend $l = 0, 1, 2$. So sähe das Spektrum in der Quantendimension aus, wenn das Elektron ein zweidimensionales Objekt wäre. In drei Raumdimensionen ergeben sich bei radialen Knotenlinien wegen der Kugelsymmetrie keine weiteren Möglichkeiten. Bei einer azimuthalen Knotenlinie gibt es in drei Dimensionen mehr Kombinationsmöglichkeiten, da die Knotenlinie waagrecht oder senkrecht zur z-Achse liegen kann. Pro zusätzlicher azimuthaler Knotenlinie macht das zwei zusätzliche Zustände. So sähe das Spektrum in der Quantendimension aus, wenn das Elektron ein dreidimensionales Objekt wäre. Tatsächlich hat die Quantendimension mehr zu bieten: Der Spin ist eine zusätzliche Schwingungsmode des Elektronenzustands, der projiziert auf drei Dimensionen die möglichen Eigenzustände "up" und "down" bezüglich des Drehoperators hat. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad des Elektrons wird hier durch eine weitere Spiegelebene visualisiert – die Anzahl der Eigenzustände verdoppelt sich, der Elektronenzustand ist somit das Produkt aus Orts- und Spinzustand in der Quantendimension.

So sieht also eine mögliche Weiterentwicklung des Bohr'schen Atommodells in die Quantendimension aus: Erstens wird aus dem Drehimpuls der Drehoperator: \hbar entspricht somit dem kleinstmöglichen messbaren Unterschied vom Drehimpuls. Zweitens können wir durch Abzählen von Knotenlinien erklären, warum es genau $2n^2$ Eigenzustände pro Bahn oder Energiestufe n gibt, mit n gleich eins, zwei, drei, und so weiter.

2.8.7. Atomorbitale [Link zu U2-8-07](#)

So sieht also eine mögliche Weiterentwicklung des Bohr'schen Atommodells in die Quantendimension aus: Erstens wird aus dem Drehimpuls der Drehoperator: \hbar quer

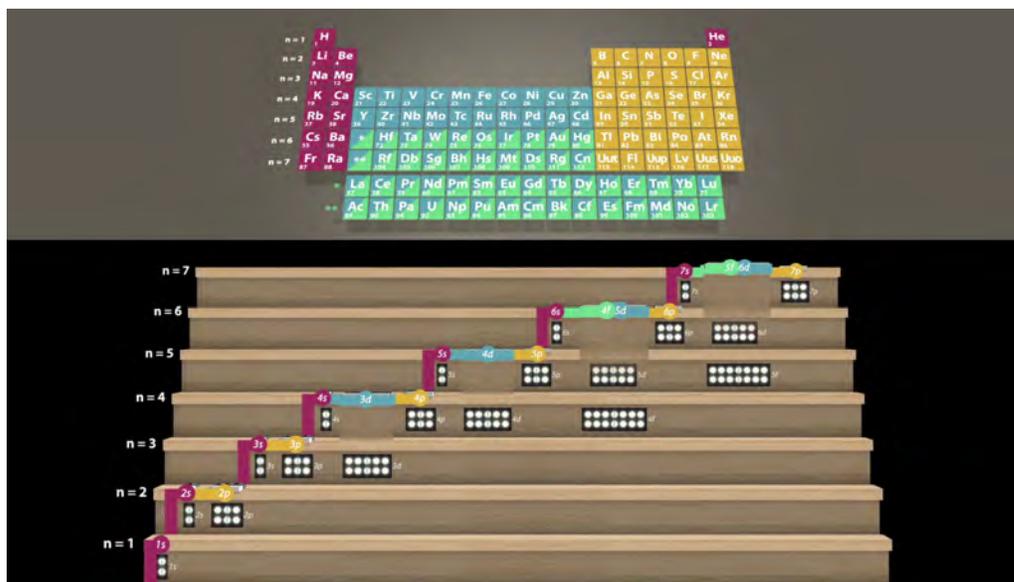


Figure 23. Der Aufbau des Periodensystems lässt sich durch die Visualisierungen der U2 Quantenspiegelungen nachvollziehen. Wesentlich sind hierfür Symmetrieeigenschaften der Spin-Zustände $|j, m\rangle$.

entspricht somit dem kleinstmöglichen messbaren Unterschied vom Drehimpuls.

Zweitens können wir durch Abzählen von Knotenlinien erklären, warum es genau zwei n quadrat Eigenzustände pro Bahn oder Energiestufe n gibt, mit n gleich eins, zwei, drei, und so weiter. Hinter dieser Wahrscheinlichkeit liegt allerdings die unsichtbare, interferenzfähige Schwingung in der Quantendimension, hier visualisiert durch ein drehendes Rad. Dem s-Orbital liegt die Schwingung ohne Knotenlinie zugrunde. Dem p-Orbital liegt die Schwingung mit einer Knotenlinie zugrunde, also $l=1$. Betrachten wir den Zusammenhang zum p-Orbital einmal genauer. Auf einer einzelnen Kugelschale haben wir bereits den Schwingungszustand $l=1$ kennengelernt. Schneiden wir den Raum wie eine Zwiebel auf, ergeben sich viele Kugelschalen. Die Knotenlinie wird im Raum zu einer Knotenebene. Die maximale Schwingungs-amplitude nimmt bei sehr großem Abstand zum Atomkern wieder ab. In der Chemie wird nicht die gesamte Schwingung im Raum dargestellt, sondern nur der Ort maximaler Aufenthaltswahrscheinlichkeit, was den Orten mit größter Schwingungsamplitude entspricht. So ergibt sich diese Darstellung des p-Orbitals.

Dies gilt auch für alle weiteren Orbitale: Die Knotenlinien bzw. Knotenflächen werden aus der Quantendimension in die Atomorbitale im Raum sozusagen vererbt und lassen sich dort wiederentdecken! So stimmt die Chemie in der Physik!

2.8.8. Periodensystem [Link zu U2-8-08](#)

Die Elemente im Periodensystem sind nach der Anzahl von Elektronen angeordnet. Das Bohr'sche Atommodell liefert uns keine griffige Erklärung für die Anzahl der

Elektronen in den jeweiligen Perioden bzw. Schalen. Aber was ist mit unserem Modell der Schwingungsmoden von Elektronen in der Quantendimension? Können wir das Periodensystem mit dem Abzählen von Knotenlinien erklären? Wir ordnen die möglichen Schwingungszustände den Tasten einer Orgel zu. Die Orgelmanuale entsprechen den Energieniveaus $n=1, 2, 3$ und so weiter. Ein Elektron kann einen bestimmten Schwingungszustand anregen – die Taste ist dann sozusagen gedrückt und die entsprechende Schwingung ist aktiv. Zwei Elektronen drücken - mindestens! - zwei Tasten, und je mehr Elektronen vorhanden sind, desto mehr Tasten werden gedrückt.

Doch der Reihe nach: Das erste Elektron besetzt den Schwingungszustand mit niedrigster Energie, also $n=1$. Im $1s$ Orbital haben Spin up und Down fast identische Energie - der Spin kann also in jede beliebige Richtung zeigen, Überlagerungen sind möglich. Das einfachste Atom mit nur einem Elektron ist zugleich das häufigste chemische Element im Universum: das Wasserstoff-Atom.

Ein zweites Elektron kann nicht genau denselben Zustand wie das erste einnehmen - das ist das sogenannte Pauli-Prinzip. Bei zwei Elektronen im $1s$ -Orbital sind also die beiden unterschiedlichen Spinzustände up und down besetzt. Damit ist die erste Schale schon voll und das entsprechende Element mit zwei Elektronen ist das Edelgas Helium. Das dritte Elektron hat keinen Platz mehr in der untersten Schale und muss einen Zustand mit einer Knotenlinie in der zweiten Schale besetzen - wieder das Pauli-Prinzip. Weil radiale Knotenlinien energetisch etwas günstiger sind als azimuthale, wird zunächst das $2s$ Orbital, und nicht das $2p$ -Orbital, besetzt. Dieses einzelne Elektron ist sehr reaktiv, und somit bezeichnenderweise auch das hochreaktive Alkalienelement Lithium. Das vierte Elektron besetzt den anderen Spin-Zustand im $2s$ -Orbital - dies entspricht dem Element Berillium. Das fünfte Elektron besetzt nun erstmals einen Zustand mit azimuthaler Knotenlinie und entspricht dem seltenen Halbmetall Bor. Mit sechs Elektronen erhalten wir Kohlenstoff. Weil die negativen Elektronen sich gegenseitig abstoßen und im p -Orbital ja noch weitere Zustände möglich sind, wird nicht erst der Spin komplettiert, sondern das nächste p -Orbital bestückt - dies ist die sogenannte Hund'sche Regel. Beim Stickstoff sind alle p -Orbitale einmal gefüllt und erst beim Sauerstoff wird ein p -Orbital doppelt besetzt. Dann kommt Fluor, und schließlich ist beim Edelgas Neon die zweite Schale gefüllt.

Damit haben wir die Anordnung und Anzahl der Elemente der ersten zwei Perioden im Periodensystem verstanden: s -Orbitale bieten Platz für maximal zwei Elektronen; p -Orbitale für maximal sechs Elektronen. Ganz rechts im Periodensystem stehen die Edelgase: Also Elemente, deren Schalen komplett gefüllt sind und bei denen viel Energie benötigt wird, um das Elektron in einen anderen freien Zustand zu heben. Dem Prinzip folgend bestücken wir unsere dritte Schale mit weiteren Elektronen. Für eine bessere Übersicht der Anordnung, ziehen wir die Orgelmanuale etwas auseinander. Es gibt wieder zwei Elemente mit $3s$ -Elektronen, sechs Elemente mit $3s$ und $3p$ Elektronen, und weitere 10 Elemente mit $3s$, $3p$ und $3d$ Elektronen.

Aber Stop! Dem Kenner wird auffallen, dass bei dieser Aufzählung zwei Elemente fehlen: Wo sind die Elemente 19 und 20, Kalium und Calcium? Wie können wir

den Bruch in der Anordnung zwischen Arsen und Scandium erklären? Wir haben es beim 2s Orbital schon erlebt: Radiale Knotenlinien sind energetisch etwas günstiger als azimuthale und werden von den Elektronen bevorzugt. Auch wenn wir hier eine Knotenlinie mehr haben, bevorzugen die Elektronen das 4s-Orbital mit zwei möglichen Zuständen – was genau den beiden fehlenden Elementen entspricht.

Aber warum macht das 21. Elektron nicht einfach weiter im 4p Orbital und wechselt stattdessen zurück zum 3d-Orbital? Und wieder die Frage: Was ist günstiger für das Elektron: eine azimuthale und zwei radiale oder zwei azimuthale Knotenlinien? Hier schlägt die niedrigere Gesamtanzahl die günstigere Sorte der Knotenlinien. Wir heben sozusagen unser Orgelmanual an und die 3d-Zustände können in folgerichtiger Anordnung besetzt werden. Das 3d-Orbital besteht aus 10 sogenannten Nebengruppenelementen, allesamt Übergangsmetalle, wie etwa das Eisen. Dann erst folgen die sechs 4p-Orbitale, bis zum Edelgas Krypton mit insgesamt 36 Elektronen. Im 4d-Orbital stehen für das 37. Elektron zwei azimuthale und eine radiale Knotenlinie bereit. Doch das Muster wiederholt sich: Die 4 radialen Knotenlinien aus dem 5s-Orbital sind für das Elektron energetisch günstiger und werden bevorzugt besetzt. Eine neue Periode beginnt. Für das 39. Elektron schlägt die niedrigere Gesamtzahl wieder die günstigere Sorte der Knotenlinien aus dem 5p-Orbital. Die 4d-Zustände werden besetzt; 10 weitere Nebengruppenelemente, allesamt Übergangsmetalle wie etwa das Palladium. Dann folgen die sechs 5p-Orbitale, bis zum Edelgas Xenon mit 54 Elektronen. Das 55. Elektron hat nun ein 5d-Orbital mit 10 Zuständen und erstmals ein 4f-Orbital mit 14 Zuständen vor sich. Wofür entscheidet es sich? Drei azimuthale Knotenlinien, oder zwei radiale und zwei azimuthale Knotenlinien?

Wenn zwei sich streiten, freut sich in diesem Fall der dritte: Das 6s-Orbital mit nunmehr 5 radialen Knotenlinien ist immer noch günstiger als die beiden Kontrahenten und wird bevorzugt gefüllt. Die Energieniveaus der 5d und 4f-Orbitale vermischen sich untereinander und bilden die Basis für die nächsten 24 Elemente. Danach folgen sechs Elemente mit immer stärker gefülltem 6p-Orbital. Das 87. Elektron besetzt wie zuvor zunächst das 7s Orbital ohne azimuthale Knotenlinien. Die 6d- und 5f-Orbitale vermischen wiederum und bilden die Basis für die Elemente 89 bis 112. Bis zu guter Letzt die 6 Zustände des 7p Orbitals gefüllt werden und damit die Elemente 113 bis 118 des Periodensystems komplettieren. Keines dieser Elemente hat stabile Isotope – sie zerfallen alle innerhalb kurzer Zeit radioaktiv. Das Bohr'sche Atommodell beschreibt zwar erstmals den Schalenbau des Atoms, ist aber nicht mächtig genug, den genauen Aufbau des Periodensystems zu erklären – mit Chladni's Hilfe ist es uns gelungen, das Modell zu erweitern und die s, p, d und f Orbitale in der Quantendimension wiederzuentdecken.

Aber das ist nicht das Ende vom Lied – nein, es ist eher der Anfang der Musik der Quantenorgel.

2.9. Vom Tanz der Elektronen (U2-9)

In dieser letzten Station zeigen wir einige ausgewählte Beispiele von Quantenmelodien.

2.9.1. Quantenorgel [Link zu U2-9-01](#)

Die Orgel gilt als die Königin der Musikinstrumente. Der Reichtum im Raum musikalischer Möglichkeiten ist nahezu unbegrenzt. Die Quantenorgel ist ganz analog die Basis für die Komposition von Quantenzuständen. Der Reichtum an Quantenmelodien ist im wahrsten Sinne des Wortes unfassbar. In dieser letzten Station auf der Linie U2 beschränken wir uns auf wenige exemplarische Beispiele solcher Quantenmelodien.

2.9.2. Helium-Neon-Laser [Link zu U2-9-02](#)

Wie funktioniert eigentlich ein Laser? Ganz einfach – man muss nur auf den Knopf drücken, und schon geht die Show los. Physikalisch gesehen steckt aber noch viel mehr dahinter. Wir betrachten als Beispiel für einen Gaslaser den HeNe-Laser.

Zwei parallele Spiegel begrenzen ein Glasrohr, in dem sich das Helium- und Neongas befinden. Die Spiegel müssen genau parallel sein, sonst zündet der Laser nicht. Das Helium wird in einer Gasentladung durch Stöße angeregt – und das Besondere hierbei ist, dass das Helium nicht durch Aussenden von Strahlung seine Energie wieder abgeben kann, sondern nur durch Stöße – es ist metastabil. Trifft das Heliumatom auf ein Neonatom, gibt es seine Energie ab – das Neon wiederum kann sofort durch Emmission eines Photons an die Umgebung in seinen Grundzustand zurückgelangen. Entscheidend für den Laser ist die sogenannte Inversion – da angeregtes Helium so langlebig ist, können sehr viele angeregte Heliumatome gleichzeitig erzeugt werden. Die angeregten Heliumatome übertragen ihre Energie auf viele Neonatome, die dann gemeinsam – in induzierter Emmission – viele Photonen erzeugen. Diese kohärenten Photonen werden im Resonator durch die beiden Spiegel hin- und herreflektiert, so dass eine stehende Welle entsteht, die sich immer weiter aufschaukelt. Ein Teil dieser stehenden Welle wird bei dem Spiegel, der nicht zu 100 Prozent reflektiert, ausgekoppelt – und das ist dann der Laserstrahl, den wir sehen können.

Warum kann das Helium-Atom keinen Strahlungsübergang machen? Im Bohr'schen Atommodell würde jedes Elektron aus einer höher liegenden Schale durch Aussenden von Strahlung in eine tiefer liegende Schale gelangen können. Bohr kann und hier also nicht weiterhelfen. Im Modell der Quantenorgel unterscheiden wir nicht nur die Schalen $n=1, 2, 3, \dots$ sondern auch die Orbitale innerhalb der Schalen, also die s, p, d und f Orbitale mit jeweils einer zusätzlichen azimuthalen Knotenlinie in der Wellenfunktion. Ein Elektron im p-Orbital kann nur durch Wechsel des Orbitals ein Photon aussenden, beispielsweise beim Übergang von 3p zu 2s. Diese Bewegungen "in der Diagonalen" sind möglich, alle anderen verboten. So ist zum Beispiel der Übergang von 2s nach 1s verboten. Dies sind die sogenannten "Auswahlregeln". Wir können diese Regeln mit der Bewegung des Läufers auf einem Schachbrett vergleichen: Ein weißer Läufer kann

sich nur diagonal bewegen und bleibt auf den weißen Feldern. Für den schwarzen Läufer gilt entsprechendes – so dass nur die hier gezeigten Übergänge erlaubt sind.

Woher kommen diese Auswahlregeln? Hierzu müssen wir die Ortswellenfunktion des Elektrons betrachten; der Spin spielt hierbei zunächst keine Rolle. Wir beginnen mit den s- und p-Orbitalen als Beispiel. Im s-Orbital hat die Wellenfunktion keine azimuthale Knotenlinie, im p-Orbital eine. Die drei räumlichen Orientierungsmöglichkeiten der Knotenlinie stellen wir als linksdrehende bzw. rechtsdrehende, sowie als horizontale Knotenlinie dar. Die Wellenfunktion des Photons hat eine azimuthale Knotenlinie. Diese wird von dem Elektron sozusagen "vererbt" – denn bei diesem Übergang entsteht vertikal polarisiertes Licht, und aus dem p-Orbital wird ein s-Orbital mit weniger Energie und mit einer azimuthalen Knotenlinie weniger. Aus der linksdrehenden Schwingung im p-Orbital wird die linksdrehende Knotenlinie auf das Photon vererbt – es entsteht ein linkszirkular polarisiertes Photon, und übrig bleibt für das Elektron ein s-Orbital mit weniger Energie, und mit einer azimuthalen Knotenlinie weniger. Aus der rechtsdrehenden Schwingung im p-Orbital wird die rechtsdrehende Knotenlinie auf das Photon vererbt – es entsteht ein rechtszirkular polarisiertes Photon, und übrig bleibt für das Elektron ein s-Orbital mit weniger Energie, und mit einer azimuthalen Knotenlinie weniger.

Ein einzelnes Photon ist polarisiert, hat also eine Knotenlinie – wenn das Elektron vorher keine Knotenlinie hat und hinterher auch keine, kann kein Photon entstehen – denn wo sollte dessen Knotenlinie herkommen? Dennoch ist es für ein Elektron ab dem 3s-Orbital möglich, Strahlung auszusenden: Ähnlich wie in U1 Station 11 Slide 6 gezeigt, kann eine rotationssymmetrische Wellenfunktion ohne Knotenlinie auch als Überlagerung von rechts- und linksdrehenden Orbitalen aufgefasst werden. Wenn ein rechtsdrehend polarisiertes Photon emittiert wird, entsteht ein linksdrehendes p-Orbital für das Elektron. Wenn ein linksdrehend polarisiertes Photon emittiert wird, entsteht ein rechtsdrehendes p-Orbital für das Elektron. Somit haben wir die Bedeutung der Auswahlregeln verstanden: Der Läufer geht diagonal, weil nur beim Wechsel des Orbitals eine azimuthale Knotenlinie auf das Photon übertragen werden kann. Genau aus diesem Grund ist ein angeregtes Elektron im 2s-Zustand metastabil: Die Emission eines Photons beim Übergang ins 1s-Orbital ist hier unmöglich, der weiße Läufer bleibt auf dem weißen Feld. Genau dies passiert mit den angeregten Helium-Atomen: Nur durch einen sogenannten Stoß 2. Art, also die Übertragung der Anregungsenergie auf das Neon-Atom, kann das Helium strahlungsfrei wieder in den Grundzustand zurückgelangen. Die vielen technischen Anwendungen von Gaslasern wären ohne dieses subtile Wechselspiel von Knotenlinien zwischen Elektronen und Photonen undenkbar.

2.9.3. Quantenknoten [Link zu U2-9-03](#)

Der Elektronenzustand hat einen Orts- und einen Spinanteil. Beide Anteile lassen sich aus dem Spektrum der Gitarrensaite ableiten. Wir betrachten die Grundschwingung und den ersten Oberton; alle höheren Moden lassen sich ganz analog herleiten. Der Schlüssel

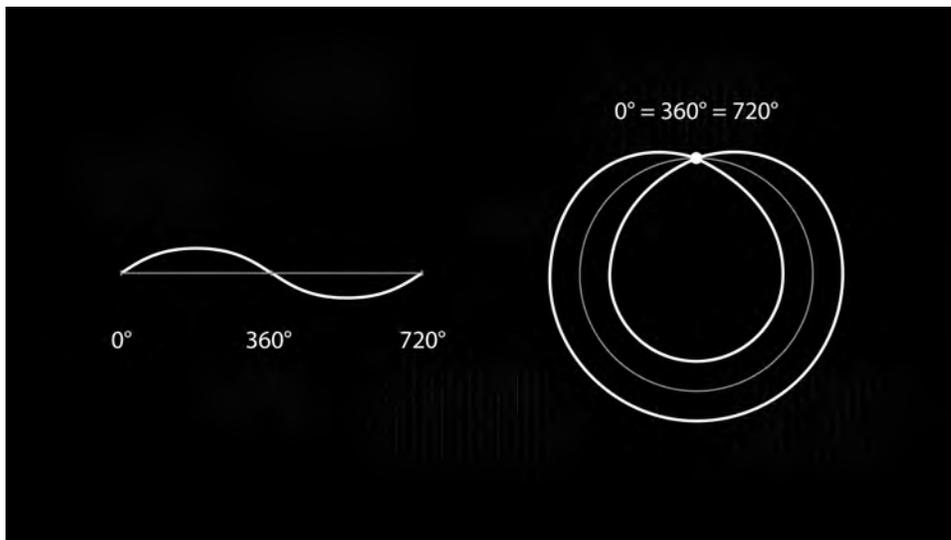


Figure 24. In der Quantendimension (720°-Welt) ist der Spin eine einfache stehende Welle - es gibt kein Pauli-Prinzip und keinen Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen (links). Erst durch Projektion in unsere 360°-Welt entsteht die Doppeldeutigkeit des Spins (rechts).

liegt in der Geometrie des Raums, in dem der Zustand schwingt. Beginnen wir ähnlich wie in U2-05 Slide 5 mit einem einfachen Kreis. Wenn wir den Anfangs- und Endpunkt miteinander identifizieren, ergibt sich dieser Schwingungszustand auf der Kreislinie. So eine Schwingung mit "Knick" kann aber nicht stabil sein, dieser Zustand existiert nicht. Nun betrachten wir den ersten Oberton. Wickeln wir diesen Schwingungszustand auf einen Kreis, indem wir den Anfangs- und Endpunkt miteinander identifizieren, ergibt sich der uns bereits wohlbekannt Zustand mit einer Knotenlinie, also $l = 1$.

In der Quantendimension befinden sich alle Schwingungszustände mindestens auf einer Kugeloberfläche in vier Dimensionen. Einzelne Großkreise in vier und mehr Dimensionen schließen nicht bereits nach 360 Grad, sondern erst nach 720 Grad. In der Quantendimension sehen also die Grund- und Oberschwingungen so aus – alles verdoppelt sich! Beim Aufwickeln auf einen Kreis im dreidimensionalen Raum werden also alle Schwingungsmoden doppelt aufgewickelt. Was hat das für Konsequenzen? Für die Grundschwingung ergibt sich durch das doppelte Aufwickeln folgender Schwingungszustand mit einem Knotenpunkt. Der "Knick" verschwindet, dieser Zustand kann also tatsächlich existieren! Für den Zustand l gleich eins macht das doppelte Aufwickeln gar keinen Unterschied – hier ist es egal, ob wir den Zustand als Projektion aus vier, oder einfach direkt in drei Dimensionen interpretieren. Die doppelt aufgewickelte Grundmode hat einen Knotenpunkt und entspricht dem Spinzustand, der erste Oberton hat wie gewohnt eine Knotenlinie und entspricht dem Zustand $l=1$. Wir betrachten den Spinzustand mit einem Knotenpunkt nun genauer. Die Antipode des Knotenpunktes ist der Ort maximaler Amplitude. Auf der Bloch-Kugel entspricht dies genau der Richtung, in die der Spin "up" Zustand erscheint - in dieser

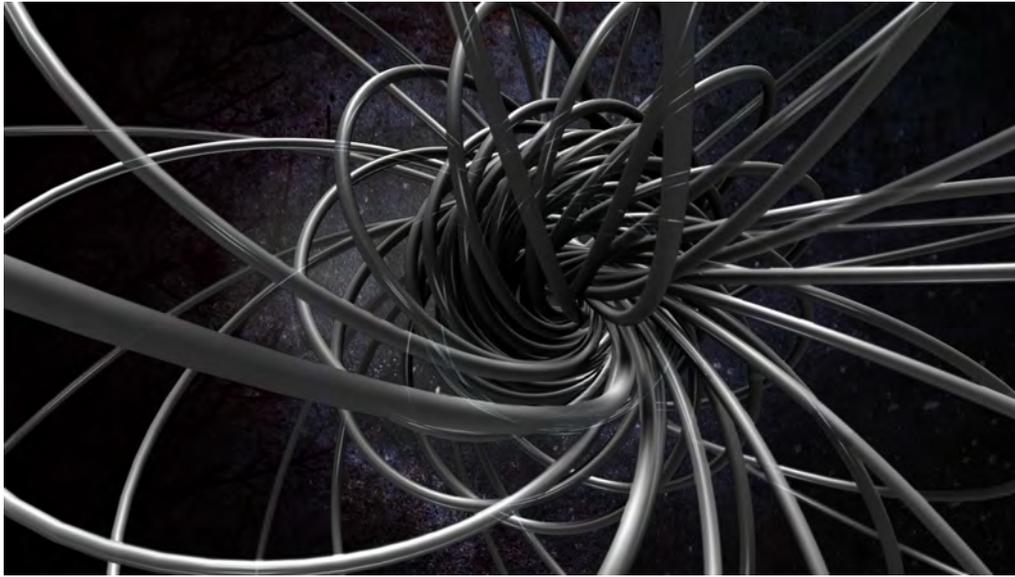


Figure 25. 720°-Geometrie der Quantendimension: Dargestellt sind Fasern der Kugel S^3 in stereographischer Projektion. Die Visualisierung der zeitlichen Dynamik kann z.B. mit der Software Antitwister umgesetzt werden.

Projektion - genau als Spiegelbild des Spin "down" Zustands. Der Abstand zwischen den Zuständen ist gegeben durch \hbar , der Abstand zur Spiegelebene ist somit $s = +1/2$ bzw. $s = -1/2$ in Einheiten von h quer.

2.9.4. Pauli-Prinzip [Link zu U2-9-04](#)

Alle Quantenzustände haben ihren Ursprung in der Spiegelebene. Wir erzeugen die Spinzustände up und down durch den hier gezeigten Doppelpfeil. Kombinierte Zustände mit zwei Spins können wir erzeugen, indem wir den Doppelpfeil auf die jeweilige Position des ersten Spins verschieben. Es ergeben sich die vier Kombinationen up/up, up/down, down/up und down/down.

Für ein tieferes Verständnis von Zwei-Spin-Zuständen, und allgemein Mehr-Teilchen-Quantenphysik, spielen Symmetrien unter Vertauschung eine wesentliche Rolle. Solche Symmetrien begegnen uns auch bei klassischen Schwingungszuständen: Erinnern wir uns an die Tasse mit Henkel. Durch Spiegelung an der gezeigten Ebene am Henkel geht der Zustand mit Schwingungsbauch am Henkel in sich selber über, der Zustand mit Schwingungsknoten am Henkel aber in sein Negatives.

Unter Vertauschung von A mit B ergibt sich also entweder Symmetrie - AB^+ - oder Antisymmetrie, AB^- . Symmetrie oder Antisymmetrie unter Vertauschung von A und B findet sich als Prinzip bei Zwei-Teilchen Zuständen wieder: Denn die Kombinationen aus zwei ununterscheidbaren Spins überlagern zu gemeinsamen Schwingungsmoden, die entweder symmetrisch oder antisymmetrisch unter Vertauschung der Spins A und B sind. Die drei symmetrischen Spinkombinationen werden als Triplet bezeichnet;

die antisymmetrische als Singulett. Der gesamte Zwei-Elektronen-Zustand besteht aus einem Orts- und einem Spinzustand. Das symmetrische Spintriplett kombiniert mit dem antisymmetrischen Ortszustand, und das antisymmetrische Spinsingulett mit dem symmetrischen Ortszustand. Dies ist das Pauli-Prinzip: Der Zustand von zwei Elektronen A und B muss insgesamt antisymmetrisch sein! Aus dem Pauli-Prinzip folgt aber auch, dass jeder Spinzustand nur einmal besetzt werden kann. Dies liegt an der Doppeldeutigkeit: Die Rotation um 360 Grad führt beim Spin zu einem Vorzeichenwechsel! Erst nach 720 Grad ist der Ausgangszustand wieder erreicht. Für einen einzelnen Spin ist dies irrelevant, da die Phase des drehenden Rades unbeobachtbar ist. Ist derselbe Spinzustand aber doppelt besetzt, ergibt die Vertauschung der Teilchen A und B bzw. die Drehung einer der beiden Spins um 360 Grad aber wegen der Doppeldeutigkeit genau das negative des Ausgangszustandes. Ein identischer Zustand kann aber nur dann gleich seinem eigenen Negativen sein, wenn er gleich Null ist. Bisher haben wir vereinfachend nur die Zustände auf einem einzelnen Großkreis betrachtet. Die Geometrie der Quantendimension ist weitaus komplexer. Links zeigen wir die uns bekannte zweidimensionale Kugeloberfläche in drei Dimensionen. Rechts zeigen wir entsprechende Punkte der dreidimensionalen Kugeloberfläche in vier Dimensionen, die wir stereographisch projizieren, also so verzerren, dass eine Darstellung überhaupt möglich wird. In der Tat schließt der Großkreis in vier Dimensionen erst nach doppelter Umrundung der Kugel in drei Dimensionen. Die Knotenlinie des Spinzustands in der Quantendimension wird durch diese Projektion zu einem Knotenpunkt auf der Blochkugel. Die Antipode des Knotenpunktes ist der Ort maximaler Amplitude. Tatsächlich gehen bei dieser Projektion nicht nur 360 Grad pro Großkreis, sondern auch noch eine ganze Dimension verloren – die unsichtbare Phase. Einem Punkt auf der Blochkugel entspricht in der Quantendimension ein ganzer Großkreis. Alle unsichtbaren Phasen befinden sich auf ineinander verschlungenen Großkreisen. Betrachten wir eine Schar von Punkten auf der Blochkugel, entsprechen dieser in der Quantendimension einem faszinierendem System von ineinander verschlungenen Ringen. Aber dies ist erst der Anfang, der Aufbruch in die Quantendimension – darf ich mich vorstellen? Mein Name ist Omega.

2.9.5. Gitarrenspiegelung [Link zu U2-9-05](#)

Alice und Bob koexistieren in Superpositionszuständen, bis der Hausmeister als externer Beobachter den Kollaps erzwingt. Bob platzt am Ende der Kragen in diesem Wirrwarr an Quantensymbolik. "Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der hat sie nicht verstanden." Dieses Zitat von Nils Bohr hat sicherlich bis heute seine Berechtigung. Der Schock dauert nun über 100 Jahre an, und weicht allmählich einem gewissen Pragmatismus – Anwendungen der Quantenphysik finden sich heute fast in jedem Industriezweig. Unser Bild des Gitarrenspiegels und das daraus abgeleitete Modell der Quantenorgel stehen für diesen pragmatischen Zugang zur Quantenphysik: Die Modelle beanspruchen keinen Wahrheitsgehalt, sondern sind eine Anschauungshilfe



Figure 26. Die Symbole des Spielfilms Schattenwelten werden wie Puzzlesteine in der Subdimension neu zusammengesetzt, wodurch erst die eigentliche Handlung des Films deutlich wird.

für praktische Anwendungen. Der Interpretationsspielraum bei jeder Modellierung spiegelt die Stärke der Quantenphysik, aber auch die Faszination wissenschaftlicher Suche ganz im Allgemeinen wieder, denn:

Die Wahrheit ist: offen.

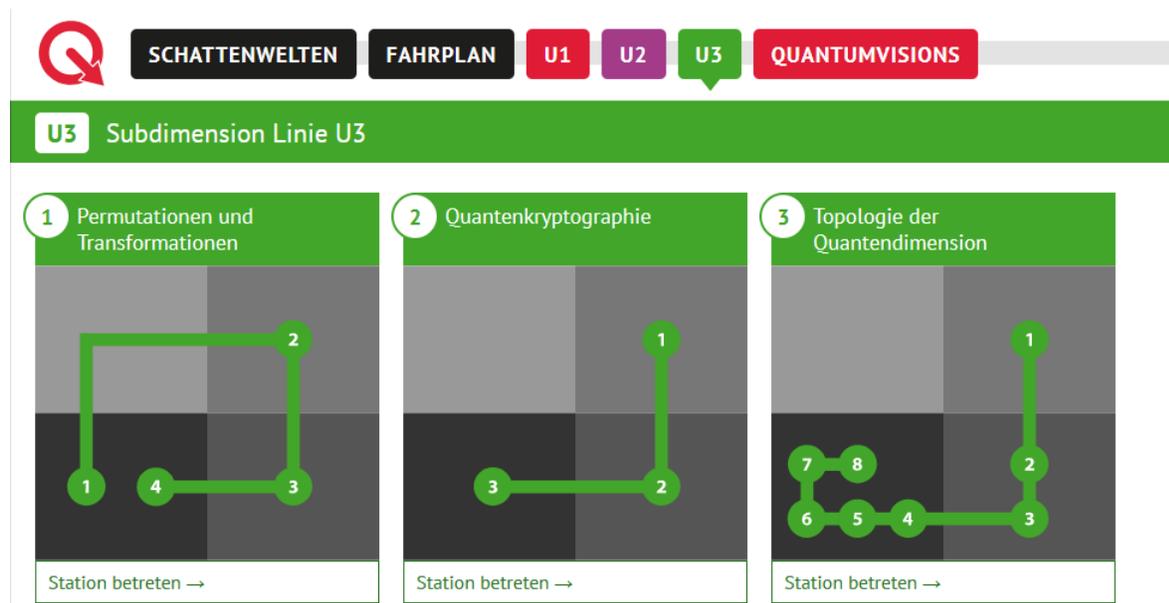


Figure 27. Überblick über die Stationen der U3: <https://www.quantenspiegelungen.de/subdimension-linie-u3/>

3. U3: Quantensymmetrien

3.1. Permutation und Transformation (U3-1)

Ist die Zukunft nur eine Permutation der Vergangenheit?

3.1.1. Schattenwelten [Link zu U3-1-01](#)

Die dreidimensionale Welt – eine Schattenwelt? Ein Oberflächeneffekt eines viel höherdimensionalen Raums? Oder bedingen sich Schattenwelt und Quantendimension, existieren sie, weil sie eine Symbiose bilden? Ist die Zukunft nur eine Umordnung, eine Permutation der Vergangenheit? Wie kommt das Neue in die Welt? Folgen Sie mir in meine Dimension. Die U3-Quantensymmetrien zeigt in Kombination mit der U1-Quantendimensionen und U2-Quantenspiegelungen einen topologischen Blick auf das Standardmodell der Elementarteilchenphysik mit den Symmetriegruppen U1, U2 und U3.

Doch zunächst betrachten wir in der ersten Station die Permutation von Information in einfachen Beispielen – mit Bildern und mit Musik. Der Hausmeister spielt auf einem Xylophon mit vertauschten Stäben. Kein Wunder, dass die Musik nicht so klingt, wie Bob sie normalerweise kennt. Notenschrift bezieht sich immer auf eine Basis – hier die Anordnung der Stäbe auf dem Xylophon. Wir haben die Koordinaten – also die Noten des Musikstücks – in der falschen Basis gespielt. Machen wir also eine Basistransformation, indem wir die Stäbe vertauschen. Dann kommen wir zur Standardbasis zurück, zum Xylophon, wie wir es kennen, mit aufsteigenden Tönen.

Wir können das aber auch umgekehrt machen: Wenn wir die Basis transformieren, und sagen, dass das die richtige Basis sein soll, dann sind die Koordinaten falsch! Wir müssen dann also nicht nur die Basis, sondern auch die Koordinaten entsprechend transformieren. . . . Wenn wir das Stück in der für diese Basis passenden Noten spielen, hören wir wieder dasselbe Musikstück! Die Musik ist unter dieser Transformation invariant – die Permutationen sind die entsprechende Symmetriegruppe. Bei 13 Stäben sind das weit über 6 Milliarden Permutationsmöglichkeiten von Basis und Koordinaten. Auch im Standardmodell der Elementarteilchenphysik werden wir solche Symmetriegruppen wiederfinden, deren Kern immer Permutationen sind.

3.1.2. Klangpermutationen (U3-1-02) [Link zu U3-1-02](#)

Musik in der falschen Basis abzuspielen ist im Grunde eine spezielle Art von Verschlüsselung – von Kryptographie! Diese Idee – also Verschlüsselung einer Botschaft durch Koordinaten, die in der falschen Basis gelesen werden – wurde früher tatsächlich verwendet, allerdings nicht mit Noten, sondern mit Buchstaben. Wir interessieren uns aber für Permutationen auch aus einem ganz anderen Grund – denn diese sind das Grundgerüst aller Operationen in der Quantendimension.

Beginnen wir mit der einfachst möglichen Permutation – dem Vertauschen von zwei Gegenständen. Nochmaliges Vertauschen führt hier zurück zum Anfangszustand. Legen wir noch einen weiteren Gegenstand dazu. Wenn wir jetzt eine Vertauschung anwenden, gibt es drei Möglichkeiten, 123 wird zu 213, 321, oder 132. Wenn wir noch eine Vertauschung anwenden, gibt es nur zwei unterschiedliche Möglichkeiten, also 123 zu 231 oder 312. Die dritte Möglichkeit würde wieder den Ausgangszustand ohne Permutation ergeben. Ähnlich wie in U1-01 ergibt sich eine Baumstruktur, immer mit zwei Abzweigungen in die folgende Generation: entweder nur einen Gegenstand anlegen ohne zusätzliche Permutation, oder Anlegen und Permutieren. Dieses Bild wiederholt sich nun immer wieder, wenn weitere Gegenstände dazukommen. Im 13. Stockwerk sind dann alle 13 Fakultät, das sind etwa 6 Milliarden Permutationen nach diesem Schema klassifiziert. Wer hätte das gedacht, dass man so viele Möglichkeiten hat, Noten zu schreiben. . . . Und alle Permutationen lassen sich verstehen, wenn wir die einfache Vertauschung von zwei Gegenständen verstehen! Vertauschungen sind aber nicht so einfach, wie sie aussehen – als kleinen Vorgeschmack davon stellen wir uns die Objekte 1, 2, 3 als Koordinatenachsen vor – die Vertauschungen entsprechen dann Drehungen um 90 Grad. Wie in U2-06 Slide 2 – wo es um Drehungen ging, zum Beispiel von einer Banane. Die 90°-Drehung um die 1-Achse entspricht dem Vertauschen von Achse 2 und 3. Jetzt drehen wir um die 3-Achse, was dem Vertauschen von Achse 1 und 2 entspricht. Die Reihenfolge spielt eine entscheidende Rolle: Wenn wir die Banane erst um die 3-Achse drehen, und dann um die 1-Achse, ist der Endzustand ein ganz anderer. Das heißt, die Drehoperationen kommutieren nicht - genau wie die Permutationen. Wenn wir also die Objekte, die permutiert werden, als Dimensionen interpretieren, haben wir hier das Grundgerüst von Drehungen in beliebig hohen Dimensionen gefunden. Das ist ein

weiterer Puzzlestein für die Beantwortung der Frage, ob die Zukunft eine Permutation der Vergangenheit ist – in der Quantendimension wird die Zeitentwicklung tatsächlich als komplexe Drehung beschrieben – das ist der Kern der sogenannten Schrödinger-Gleichung.

Die Wahl der Basis und der entsprechenden Koordinaten ist aber beliebig. Diese Idee führt zum sogenannten Eichprinzip – einer wesentlichen Grundlage des Standardmodells der Elementarteilchenphysik.

3.1.3. Operation mit Musikstücken [Link zu U3-1-03](#)

Die Quantenorgel aus der U2-09 visualisiert alle möglichen Schwingungszustände gebundener Elektronen im Atom – und beschreibt so den Aufbau des Periodensystems. Schwingungszustände und Operationen sind grundlegend für die Quantenphysik – aber viele ihrer Eigenschaften lassen sich auch in einfacheren Beispielen verstehen... zum Beispiel mit einer normalen Klaviertastatur. Auf jede beliebige Melodie, also die Noten und ihren zeitlichen Verlauf, können wir Operationen anwenden. Wenden wir auf diese Melodie den Operator "Ableitung" an, klingt so... und das "Integral" klingt so...

Wie können wir Musikstücke "ableiten" oder "integrieren"? Dafür müssen wir die Musik erst in Zahlen kodieren. Wir zählen die Tasten durch, beginnend bei einer beliebigen Taste... Die Musik – hier die Melodie "Bruder Jakob" – wird so zu einer Zahlenfolge...so ähnlich wie bei eine Klavierwalze. Jetzt wenden wir den Differenzoperator an, der immer den Höhenunterschied zwischen zwei benachbarten Tönen der Melodie bestimmt... Es beginnt bei Null, dann plus zwei, plus zwei, dann herunter - minus vier, Null - also dieselbe Tonhöhe, dann plus zwei, plus zwei, und so weiter. Das ist zunächst erst eine Zahlenfolge, aber wir können diese dann wieder als Melodie interpretieren. So entsteht die Ableitung von Bruder Jakob. Der Integraloperator summiert alle Zahlen auf... Beginnend mit der ersten Zahl, -4, dann plus -2, ergibt -6, dann plus 0, bleibt -6, dann plus -4, ergibt -10, dann wieder -4, ergibt -14, und so weiter. So erhalten wir wieder eine Zahlenfolge, die wir erneut als Melodie interpretieren können – das Integral von Bruder Jakob! Was passiert, wenn wir erst die Operation "Integral", und dann die Operation "Ableitung" anwenden? Schauen wir also die Differenzen in der Stufenfolge wieder an, -4, -2, 0, -4, -4, und so weiter... Diese Zahlenfolge kommt uns doch bekannt vor – das ist doch genau wieder die Ausgangsmelodie von "Bruder Jakob"! Mathematische gesehen entspricht das dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Aber wir können das auch als eine besondere Form von Verschlüsselung und Entschlüsselung betrachten, da - bis auf Transposition, also einer Verschiebung des Nullpunktes auf der Tastatur – keine Information verloren geht.

All dies sind Operationen auf Schwingungszuständen, genau wie auch in der Quantenphysik Operationen auf Schwingungszuständen ausgeführt werden. Allerdings sind diese – wie wir schon oft gehört haben -nicht hörbar... Und sehen können wir diese schon gar nicht. Umso wichtiger daher die mathematische Ebene, mit der wir uns

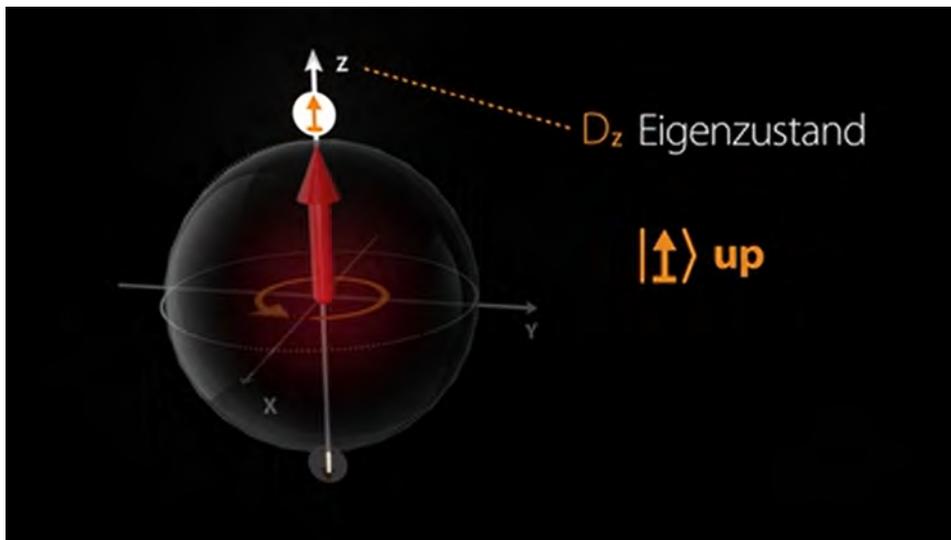


Figure 28. Beim Spin-Eigenzustand liegt der Zustand genau auf der Drehachse auf der Bloch-Kugel - darum gibt es immer genau zwei Eigenzustände auf den Antipoden.

diese Welt mehr und mehr zugänglich machen können.

3.1.4. Operation mit Qubits [Link zu U3-1-04](#)

Als Vorbereitung der Anwendung Quantenkryptographie in der nächsten Station untersuchen wir hier zunächst Basistransformationen beim Spin. Dieses Qubit beschreibt den Spin "up" – aber ist das auch ein Eigenzustand? Ja und nein – das kommt auf die Drehachse an! Bezüglich Drehungen um die y-Achse ist Spin "up" kein Eigenzustand, da die Spinrichtung durch die Drehung verändert wird. Up wird zu down – dann wieder zu up... eine Permutation! Spin up ist aber Eigenzustand bezüglich Drehung um die z-Achse: Spin "up" bleibt wo er ist – die Richtung ändert sich nicht, was ja genau den Eigenzustand definiert.

Das gilt allgemein: Hier ein beliebiges Qubit – und eine beliebige Drehachse – die Drehung ergibt einen Kegel. Stimmen Zustand und Drehachse überein, ist derselbe Ausgangszustand aber ein Eigenzustand! Das andere Extrem ist die dazu senkrecht stehende Drehachse, wo der Kegel zu einer Ebene entartet. In U2-07 Slide 3 haben wir das Stern-Gerlach Experiment diskutiert. Das inhomogene Magnetfeld gibt eine z-Achse vor. Der Messprozess bzw. die Wechselwirkung führt dazu, dass der beliebige Ausgangszustand zu einem Eigenzustand bezüglich der vom Magnetfeld vorgegebenen z-Achse wird. Der Ausgangszustand muss sich sozusagen nach dem vorgegebenen Schlitz ausrichten... Warum muss das Magnetfeld dafür inhomogen sein? Wäre es homogen, würde der Spin einfach nur auf dem Kegelmantel drehen, ohne sich auszurichten... Das inhomogene Magnetfeld führt dazu, dass der Pfeil spiralförmig auf die z-Achse zudreht und dabei kürzer wird. So wird der Zustand auf die z-Achse projiziert. Ist der Ausgangszustand genau senkrecht zur z-Achse, ergibt sich Pfeillänge 0, also je 50

Prozent Wahrscheinlichkeit für up oder down – ein vollkommen gemischter Zustand.

Ein Eigenzustand ändert sich durch die Projektion überhaupt nicht – es ergibt sich ein sicheres Ergebnis, hier Spin "down". Jetzt drehen wir das inhomogene Magnetfeld um 90° . Derselbe Ausgangszustand, der eben noch Eigenzustand war, ist jetzt kein Eigenzustand mehr. Die Projektion ergibt einen gemischten Zustand mit je 50 Prozent Wahrscheinlichkeit für parallele oder antiparallele Ausrichtung vom Spin zum Magnetfeld. Je nach Messachse ergibt derselbe Ausgangszustand also ein vorhersagbares Ergebnis, oder reinen Zufall! Der Zustand entspricht bestimmten Koordinaten – die in der einen oder der anderen Basis interpretiert werden. Diese Basistransformation ist der wesentliche Schritt für Quantenkryptographie mit Lichtteilchen, also Photonen. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

3.2. Quantenkryptographie (U3-2)

Zugänge zur Quantenverschlüsselung.

3.2.1. Alice Schachbrett-Code [Link zu U3-2-01](#)

Alice dekodiert das Zufallsmuster durch Überlagerung mit einem weiteren Zufallsmuster, dem sogenannten One-Time-Pad. Wie Alice mit Hilfe von Quantenphysik geheime Codes übertragen und entschlüsseln kann, erklären wir in dieser Station.

3.2.2. Zufallsschlüssel [Link zu U3-2-02](#)

Alice möchte Bob eine Nachricht schicken – zum Beispiel dieses Bild. Aber Vorsicht! Unverschlüsselte Nachrichten sind im Internet nicht abhörsicher! Wie können Daten sicher übertragen werden?

Es gibt verschiedene Methoden – die sicherste, die aber so aufwändig ist, dass sie noch nicht oft angewendet wird, ist folgende: Wir codieren das Bild in 0 und 1, und addieren ein Zufallsmuster Z . Das Zufallsmuster ist das Schlüssel – er dreht jedes Bit um, wenn $Z=1$ ist, sonst nicht. Heraus kommt reiner Zufall, $Z+B$ enthält keine Informationen mehr. $Z+B$ lässt sich also problemlos öffentlich versenden. Nur derjenige, der den Schlüssel Z kennt, kann die verdrehten Bits wieder zurückdrehen. Sichere Datenübertragung ist also möglich, wenn Alice und Bob über ein geheimes Zufallsmuster, ein sogenanntes "One-Time-Pad" verfügen. Alice muss Bob also dieses Zufallsmuster übertragen. Man könnte meinen, das wäre wieder das Ausgangsproblem – jetzt muss der Spion eben das Zufallsmuster abhören, um damit dann die Botschaft zu entschlüsseln. Aber keiner kann Zufall besser als Quantenphysik! Wie wir durch die Quantendimension den Spion überlisten können, erklären wir im nächsten Slide.

3.2.3. Quantenkryptographie [Link zu U3-2-03](#)

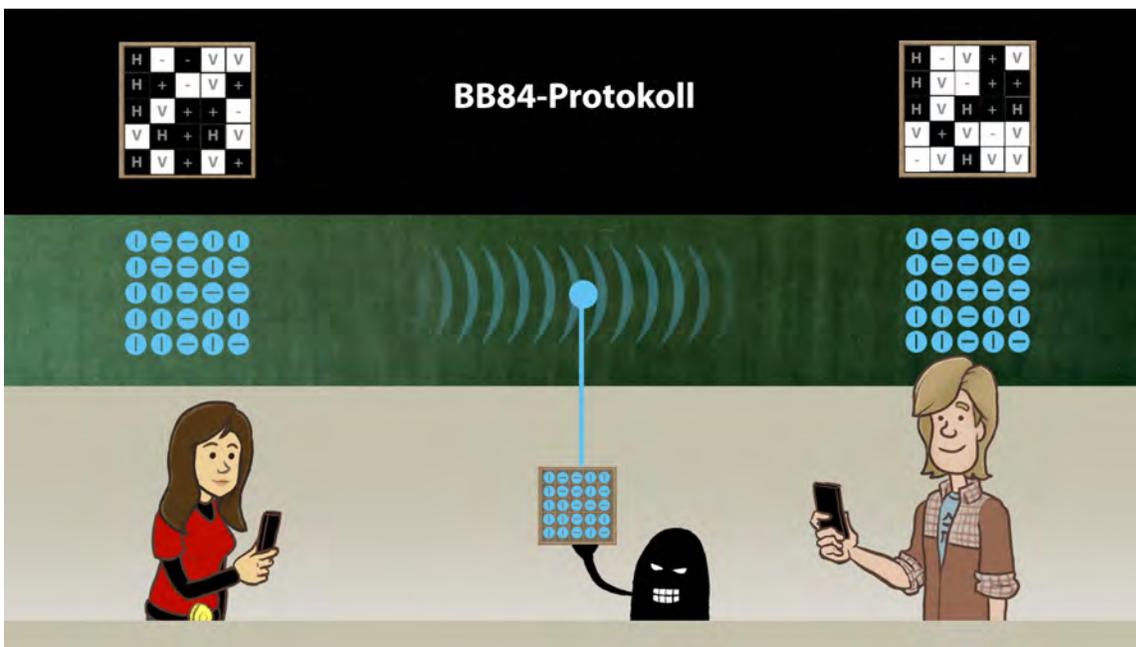


Figure 29. Visualisierung des BB84-Protokolls auf der Bloch-Kugel. Horizontal und vertikal polarisierte Zustände liegen auf Nord- und Südpol der Bloch-Kugel, bilden also das "senkrecht stehende" Basissystem. Die in $\pm 45^\circ$ polarisierten Zustände bilden das "waagerechte" Basissystem auf der Bloch-Kugel.

Für absolut abhörsichere Datenübertragung brauchen wir ein geheimes Zufallsmuster – das sogenannte One-Time-Pad – das nur Alice und Bob kennen. Hier zeigen wir, wie wir das One-Time-Pad durch polarisierte Photonen von Alice zu Bob übertragen können. Auch die Polarisation des Photons lässt sich auf der Bloch-Kugel darstellen: Pfeil nach oben bedeutet dann horizontal polarisiert, Pfeil nach unten vertikal polarisiert. In dieser Basis sind horizontal bzw. vertikal polarisierte Photonen Eigenzustände, mit 100 Prozent vorhersagbarem Ergebnis. Wenn die Photonen aber plus bzw. minus 45° polarisiert sind, dann ergibt sich in dieser Messbasis reiner Zufall – wie hier zu sehen. Zufallsmuster zu erzeugen ist also sehr einfach in der Quantenphysik – aber wie können wir ein vorgegebenes Zufallsmuster als One Time Pad sicher übertragen, so dass nur Alice und Bob darüber verfügen? Naiv gesehen könnte Alice horizontal oder vertikal polarisierte Photonen senden, und Bob könnte sie in derselben Basis messen und würde mit 100 Prozent Wahrscheinlichkeit dasselbe Resultat erhalten. Wenn es einen Spion gibt, der die Photonen in derselben Basis misst und dann je nach Resultat wieder dieselbe Polarisation weitersendet, hätte der Spion gewonnen. Aber der Spion kennt ja die Messbasis nicht. In der falschen Basis, hier also $\pm 45^\circ$, würde er ein komplett anderes Zufallsmuster erhalten, und Bob auch, denn der Spion sendet ja dann nicht mehr horizontal/vertikal polarisierte Photonen, sondern $\pm 45^\circ$ polarisierte Photonen weiter zu Bob.

Außerdem merken Alice und Bob, dass sie abgehört wurden – weil ihre

Zufallsmuster komplett unterschiedlich sind! Wenn Alice und Bob immer in derselben Basis senden und empfangen würden, müsste der Spion nur lange genug ausprobieren – bis er auf Empfang ist! Hat der Spion die richtige Basis gefunden, würden Alice und Bob nicht mehr merken, dass sie abgehört werden! Aber Alice und Bob können das verhindern, zum Beispiel im sogenannten BB84 Protokoll, das wir nun genauer erklären. Alice möchte ihren Schlüssel an Bob senden. Dafür sendet sie zufällig mal in der H/V Basis, mal in der +/- Basis. Bob ändert ebenfalls zufällig ständig die Messbasis, ohne die Basis von Alice zu kennen. Bob erhält so seine Messergebnisse. Aber welche davon kann er nehmen? Hier hilft Alice: Sie veröffentlicht nun nur die jeweils gewählte Messbasis, nicht die gesendeten Daten. Bob vergleicht nun jeweils seine Basis mit der von Alice. Nur die ca. 50 Prozent der Fälle, wo beide zufällig dieselbe Basis genommen haben, ergeben identische Daten, die Bob als Schlüssel nehmen kann, also als "One-Time-Pad".

Aber absolute Sicherheit gibt es nicht – denn wenn der Schlüssel auf dem Rechner von Bob digital vorliegt, hilft der Quantenkanal nicht mehr...und das Katz-und Maus Spiel beginnt von vorn.

3.3. Topologie der Quantendimension (U3-3)

Auf der Suche nach Omega.

3.3.1. Omegas Geheimlabor [Link zu U3-3-01](#)

Auch wenn Bobs naive Art, den Schlüssel für den Geheimgang zu Omega zu suchen, bei Alice auf große Skepsis stößt: Bobs Idee, dass er den Schlüssel einfach nur "drehen" muss, um Omega zu finden, ist genial. Wie genial diese Idee ist, weiß Bob allerdings selbst noch nicht. In dieser Station erklären wir, wie es Alice und Bob durch komplexe Drehungen gelingt, den Geheimgang zu Omega tatsächlich zu finden.

3.3.2. Komplexe Drehung [Link zu U3-3-02](#)

Ein Spiegelbild lässt sich wie folgt konstruieren: Jeder Punkt x in der realen Welt wird zum Punkt $\text{Minus } x$ in der Spiegelwelt. Die Kamera sieht Bob jetzt doppelt: Durch den direkten Lichtweg... und aus der Spiegelwelt, das Licht wird dabei am Spiegel gemäß "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" reflektiert. Die Abbildung von x nach $\text{Minus } x$ können wir auch als Drehung auffassen – und zwar als Drehung um 180° . Die Drehung um 180° entspricht somit Minus eins . Nach erneuter Drehung kommt man wieder zum Ausgangspunkt, denn zweimal 180° ergibt 360° . Der Schlüssel in die komplexe Dimension ist folgendes: Wir betrachten nun eine Drehung um 90° - dann würden zwei solche Drehungen zu 180° ergeben, also Minus eins entsprechen. Das heißt aber, dass die Drehung um 90° der Wurzel aus Minus Eins entsprechen muss - also einer Zahl, die es im Reellen überhaupt nicht gibt! Diese Verallgemeinerung der reellen Zahlen haben die Mathematiker "imaginäre Zahlen" oder auch "komplexe Zahlen" genannt...

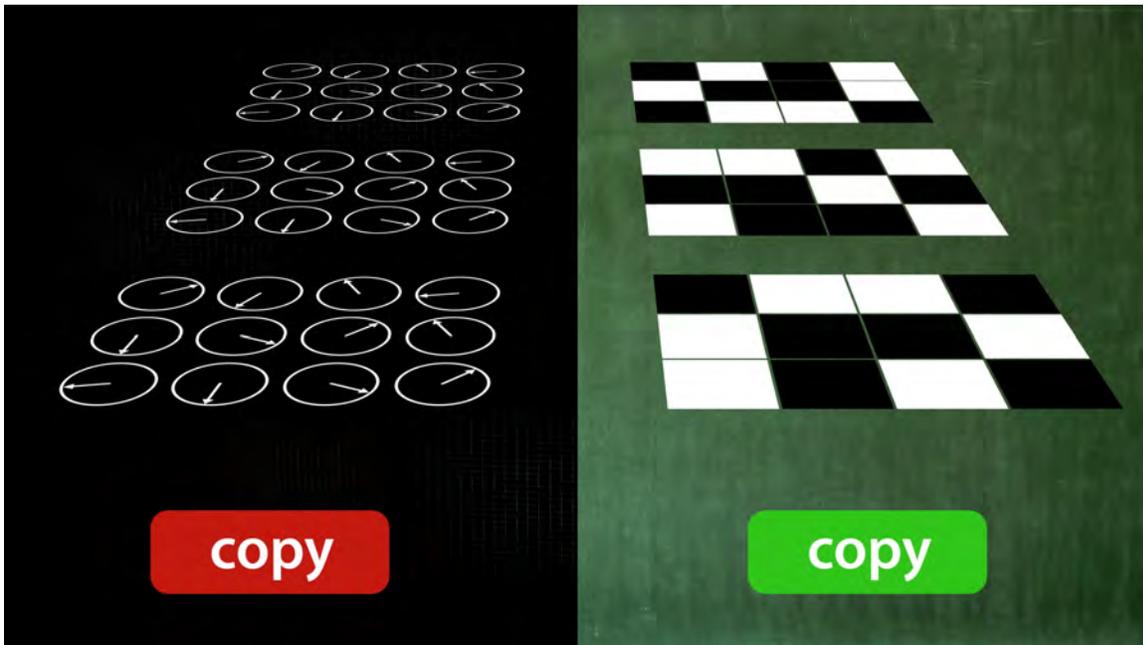


Figure 30. Zustände in der Quantendimension können nicht kopiert werden (links) - digitale Daten aber schon (rechts).

Tatsächlich sind die komplexen Zahlen der Schlüssel, der die Tür zur Quantendimension öffnen wird.

3.3.3. Komplexifizierte Funktion [Link zu U3-3-03](#)

Wie sieht die komplexe Erweiterung einer reellen Funktion $f(x)$ aus, zum Beispiel von der Abbildung von x zu $f(x) = 1/(1 + x^2)$?

Wir erweitern die reelle Zahl x nun um die imaginäre Komponente $i y$. Jede reelle Funktion $f(x)$ wird also komplex erweitert, indem x durch $x + i y$ ersetzt wird, wie hier im Beispiel zu sehen. Aus $f(x + i y)$ entsteht dann zum einen der Realteil in der komplexen Ebene, den wir hier als blau eingefärbte Berglandschaft visualisieren. Es ergibt sich eine erstaunlich reichhaltige mathematische Struktur. Deutlich zu sehen sind zwei Singularitäten, bei plus und minus i . Zum anderen zeigen wir hier den Imaginärteil von $f(x + i y)$ in der komplexen Ebene. Jetzt zeigen wir Real- und Imaginärteil zusammen. Es gibt eine sehr interessante Verbindung zwischen dem Real- und dem Imaginärteil: Betrachten wir die Höhenlinien der Berglandschaft, hier zunächst für den Realteil. Nahe den Singularitäten bei plus/minus i werden die Höhenlinien immer dichter - und hier die Höhenlinien der Berglandschaft zum Imaginärteil.

Es zeigt sich, dass die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil sich immer im rechten Winkel schneiden! Das bedeutet aber auch, dass die Information des Realteils im Imaginärteil enthalten ist - und umgekehrt! Und die gesamte komplexe Struktur ist bereits durch die Funktion $f(x)$ auf der reellen Achse determiniert - auch wenn die tiefere

Struktur hier etwas versteckt ist, insbesondere die der Singularitäten. Diese komplexe Erweiterung der Funktion $f(x)$ hilft uns, diese tiefere Struktur besser zu verstehen. Wie ist das in der Quantendimension? Ist hier auch durch die reellen Wahrscheinlichkeiten alles vorgegeben? Nein, ganz im Gegenteil! Hier ist der Weg umgekehrt, aus der komplexen Dimension in die reelle Welt. Die unsichtbare Phase zeigt, dass es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen der komplexen Wellenfunktion und den reellen Wahrscheinlichkeiten gibt. Was das für dramatische Konsequenzen hat, zeigen wir in den nächsten Slides.

3.3.4. *Komplexe Quantendimension* [Link zu U3-3-04](#)

Wie sieht der Zusammenhang zwischen den Amplituden in der Quantendimension und beobachtbaren Wahrscheinlichkeiten aus? Das Betragsquadrat des drehenden Rades ergibt die Wahrscheinlichkeit – das ist eine Reduktion auf den Radius des Rades, der Winkel – mit anderen Worten, die Phaseninformation – geht dabei verloren. Unendlich viele verschiedene Möglichkeiten führen zur selben Wahrscheinlichkeit – und sogar diese ist ja nur eine Wahrscheinlichkeit, kein sicheres Ergebnis! Was folgt daraus? Zum Beispiel lassen sich digitale Daten einfach kopieren – die Zustände in der Quantendimension lassen sich nicht kopieren! Denn wir wissen ja nicht, welche der unendlich vielen Möglichkeiten wir kopieren sollen, und wenn wir es wissen wollen, landen wir wieder auf der rechten Seite, bei den aufs Reelle reduzierten digitalen Daten. Ordnen wir die Amplituden wie auf einer Perlschnur an und geben ihnen eine Zuordnung zu Raumwinkeln – dann entsteht Omega. Omega hat viele Anwendungen – z.B. als Teil der s-Welle eines gebundenen Elektrons im Atom. Laufen wir bei festem Radius – etwa beim Bohrschen Radius – einmal im Kreis, ist die Amplitude überall gleich groß – und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons ist überall gleich groß. Aber die drehenden Räder müssen sich nicht synchron drehen, solange der Radius gleich groß bleibt – denn jede dieser Darstellungen führt ja zur selben Wahrscheinlichkeit. Diese Überbestimmtheit ist ein Wesenszug der Quantenphysik. Dies ist ein einfaches Beispiel für das Eichprinzip: Die Wellenfunktion kann an jedem Ort um eine beliebige Phase gedreht werden, und jede dieser unendlich vielen Repräsentanten ist gleichberechtigt.

3.3.5. *Spin und Polarisation* [Link zu U3-3-05](#)

Topologisch gesehen gibt es einen interessanten Zusammenhang zwischen dem Spin von Elektronen und der Polarisation von Photonen. Vergleichen wir zunächst die Experimente: Das Stern-Gerlach Experiment U2-07 zur Bestimmung des Spins, und das Experiment U1-08 zur Bestimmung der Polarisation einzelner Photonen. Zunächst zum Spin: Ist der Spin parallel zum Magnetfeld ausgerichtet, ergibt sich mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit Spin up. Die Wahrscheinlichkeit für up verkleinert sich, wenn der Winkel zwischen Ausgangsspin und Magnetfeld größer wird. Nach einer 180°-Drehung ist der Spin antiparallel zum Magnetfeld ausgerichtet, und es ergibt sich mit hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit Spin down. Bei der Polarisation

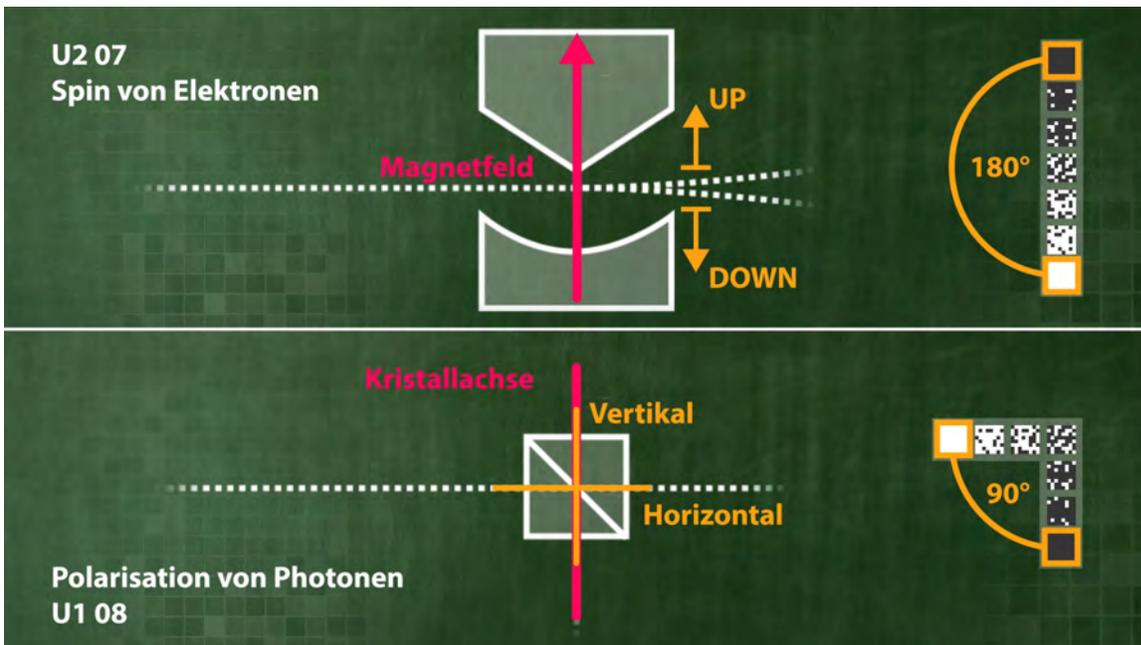


Figure 31. Geometrischer Vergleich von Spin und Polarisation

gibt es einen kleinen, aber wichtigen Unterschied: Die Polarisation "horizontal" beschreibt nur eine Achse und hat anders als der Spin keine Richtung. Die horizontale und vertikale Polarisationsachse stehen also im Winkel 90° zueinander.

Die Wahrscheinlichkeiten für up und down bzw. Reflektion und Transmission unterscheiden sich also um einen Faktor zwei im Winkel. In U2-09 haben wir bereits die entsprechenden Amplituden in der Quantendimension betrachtet: Beim Spin eine in 360° doppelt auf dem Kreis aufgewickelte Amplitude mit einem Knotenpunkt – und bei der Polarisation eine Amplitude mit zwei Knotenpunkten. Tatsächlich befinden sich alle Amplituden aber in der 720° -Quantendimension, nur können wir diese erst nach Projektion in 360° beobachten. Diese Verdopplung vom Winkel ist die wichtigste Spur bei unserer weiteren Suche nach einer topologischen Interpretation von Teilchen und Wechselwirkungen, wie wir in den nächsten Slides genauer sehen werden.

3.3.6. Topologie und Quantenknoten [Link zu U3-3-06](#)

In U2-5 haben wir die Schwingungen auf einer gewöhnlichen Kugeloberfläche nach der Anzahl l von Knotenlinien klassifiziert. Betrachten wir eine Kreislinie am Äquator der Kugel jeweils beim Zustand $m=l$. Jede der l Knotenlinien trifft diese Kreislinie am Äquator zweimal. Insgesamt ergeben sich somit $2l$ Knotenpunkte, also immer eine gerade Anzahl. Alle anderen Zustände ergeben sich durch Anwenden des Knotendrehoperators d^- . In der 360° -Welt ist dies das vollständige Spektrum auf einer Kugeloberfläche in drei Dimensionen. Skalieren wir den Abstand auf \hbar , ergeben sich wie in U2-6 die Quantenzustände, beispielsweise die von Orbitalen. Was passiert aber, wenn



Figure 32. Der Spin-Zustand j hat $2j$ Knotenpunkte, was für Fermionen (1, 3, 5... nur in der 720° -Geometrie möglich ist)

wir von der 360° -Welt zur 720° -Welt gehen, also zur dreidimensionalen Kugeloberfläche in vier Dimensionen?

Jetzt ergeben sich auch Spin-Zustände, die wie in U2-09 gesehen eigentlich ganz normale stehende Wellen sind. Erst durch das doppelte Aufwickeln in 360° ergibt sich ein einzelner Knotenpunkt für Spin $1/2$. Projiziert auf 360° füllen also die Spin-Zustände die Lücken: Es sind genau diejenigen mit einer ungeraden Anzahl von Knotenpunkten auf einer 360° -Kreislinie. Der Unterschied zwischen den Quantenzuständen mit einer geraden und denen mit einer ungeraden Anzahl von Knotenpunkten – ist immens: Die sogenannten "Bosonen" sind die von der ganz normalen Kugeloberfläche uns wohlbekannte Zustände mit einer geraden Anzahl Knotenpunkten. Bosonen können bei tiefen Temperaturen alle in den niedrigsten Zustand kondensieren, es gibt kein Verbot für Mehrfach-Besetzungen desselben Zustands. Die sogenannten "Fermionen" sind die Zustände mit einer ungeraden Anzahl von Knotenpunkten. Aufgrund der Doppeldeutigkeit, die durch die Projektion von vier auf drei Dimensionen entsteht, kann jeder in drei Dimensionen beobachtbare Zustand nur maximal einmal besetzt sein - das ist das sogenannte Pauli-Prinzip. Das Pauli-Prinzip ist die Grundlage für die Stabilität und Festigkeit von Materie. Die tiefere Ursache für die Stabilität der Materie liegt somit in der Projektion des Spins aus der Quantendimension in die 360° -Welt, und der damit verbundenen Doppeldeutigkeit des Spins, die wir im nächsten Slide nun noch genauer untersuchen.

3.3.7. Twists [Link zu U3-3-07](#)

Um den Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen besser zu verstehen, betrachten wir nun die komplexe Phase. Beginnen wir mit dem einfachsten Zustand

$j=0$. Zu jedem Winkel gehört ein drehendes Rad, wobei der Radius immer gleich groß ist – aber wie ist es mit der Phase? Die Phase kann im Prinzip jeden beliebigen Wert annehmen, ohne dass die Wahrscheinlichkeit sich ändern würde. Wir modellieren diese unterschiedlichen Phasen zu jedem Raumwinkel mit einem Papierstreifen. Die Richtung vom jedem der Pfeile auf dem Papierstreifen zeigt die Phase am entsprechenden Winkel an. Aufgeschnitten sieht zu jedem Winkel konstante Phase so aus.

Dieser Twist ist die einfachst mögliche Änderung der Topologie dieser Phasen. Wir können entweder rechtsherum oder linksherum twisten. Überlagern wir die rechts- und den links getwisteten Phasen, ergibt sich der Realteil von $e^{i\phi/2}$, also $\cos(\phi/2)$. Was passiert, wenn wir die Phase vom Zustand $l=0$ erst aufschneiden, dann twisten, und dann wieder zusammenkleben? Topologisch ergibt sich so ein Möbius-Band. Das Möbius-Band hat nur eine Oberfläche, so dass man sich nach einer Drehung um 360° auf der Rückseite, und erst nach 720° wieder am Ausgangspunkt befindet! Die Überlagerung vom rechts- mit dem linksgetwisteten Möbiusband ergibt wieder $\cos \phi$ halbe, wobei nun aber der Winkel nun von 0° bis nach 720° läuft. So ergibt sich der doppeldeutige Spinzustand mit nur einem Knotenpunkt. Wiederholen wir die Operationen Aufschneiden, twisten, zusammenkleben, können für ausgehend vom Zustand $j=0$ mit trivialer Topologie alle anderen Zustände konstruieren. Die Fermionen mit ungerader Anzahl von Twists sind alles Möbiusbänder mit nur einer Oberfläche, im Gegensatz zu den Bosonen mit einer geraden Anzahl von Twists. Das ist der wesentliche Unterschied der Phase der Quantenzustände von Bosonen und Fermionen: Nur die Fermionen füllen den 720° Raum komplett aus, die Bosonen geben sich bereits mit 360° zufrieden.

3.3.8. Alice und Omega [Link zu U3-3-08](#)

Alice hat über Bobs zugegeben etwas unbeholfene Suche nach dem Geheimgang weiter nachgedacht und nun herausgefunden, wie sie sich twisten und drehen muss, um Omega zu finden. Alice nimmt zwei Papierstreifen und klebt diese an der Längsseite zu einem doppelt so breiten Streifen zusammen. Mit den Operationen "Twisten" und "an beiden Enden Zusammenkleben" formt sie das uns bekannte Möbiusband. Laufen wir 360° im Möbiusband, kommen wir von der Vorder- zur Rückseite. Erst nach 720° sind wir wieder am Ausgangspunkt.

Hier kommt Alice Clou: Sie trennt nun die beiden ursprünglichen Papierstreifen, indem sie das Möbiusband längs wieder aufschneidet. Alice erhält ein viermal getwistetes, doppelt so langes Band – das auch als "Dirac Gürtel" bekannt ist, zu Ehren von Paul Dirac, dem Entdecker von Antimaterie. So sieht ein Fermion in der 720° -Welt aus, bevor die beiden Winkelbereiche zusammengeklebt werden, um sie in die 360° -Welt zu projizieren.

Na los, Bob – jetzt bist Du dran! Mach dasselbe für ein Boson! Also: zwei Papierstreifen an der Längsseite zusammenkleben – einmal twisten, zweimal twisten, an beiden Enden zusammenkleben. . . Aber schon nach 360° kommt Bob das Boson wieder

am Ausgangspunkt zurück. . . . Und was passiert, wenn wir das doppelt getwistete Band längs wieder aufschneiden? Heraus kommen zwei Kopien vom Ausgangszustand, die einmal ineinander verknotet sind. Uups! Na Bob - so kommst Du nie in die 720° -Welt der Quantendimension hinein. . . Alice hat nun den Dreh raus: Sie nimmt nun Ihre eigenen Haare in zwei dicke Strähnen und bindet sich einen Zopf mit ein, zwei, drei, vier fünf Twists. . . . Gefällt Dir meine Frisur? Aber Achtung, Bob! Es muss eine ungerade Anzahl von Twists sein. . . . Dann steckst Du Dir die Haare wieder zurück, und schaust in den Quantenspiegel. Dort drehst Du Dich einmal um 360° . Jetzt überlagerst Du Dich einfach nur noch mit Dir selbst. . . . und schwupps. . . . Alice ist verschwunden. . . Alice?!?

Bob das Boson denkt sich: Was Alice kann, kann ich auch! Also los – einen schönen Zopf flechten, eins zwei. . . . Ach, verflixte Perücke! Die Haare sind viel zu kurz, damit wird das nichts. . . . So, jetzt seh' ich genau so aus wie Alice! Haare zurückstecken, und in den Spiegel schauen. Dort einmal um 360° drehen. . . . Jetzt überlagere ich mich einfach nur noch mit mir selbst. . . . und schwupps. . . . Nichts passiert. . . .?!? Ach ja, es muss eine ungerade Anzahl von Twists sein – eins, zwei, drei, vier – noch einmal twisten. . . . Jetzt sollte es gelingen – Haare zurückstecken. . . . In den Quantenspiegel schauen, dort einmal um 360° drehen. . . . Mit mir selbst überlagern. . . . und schwupps. . . .

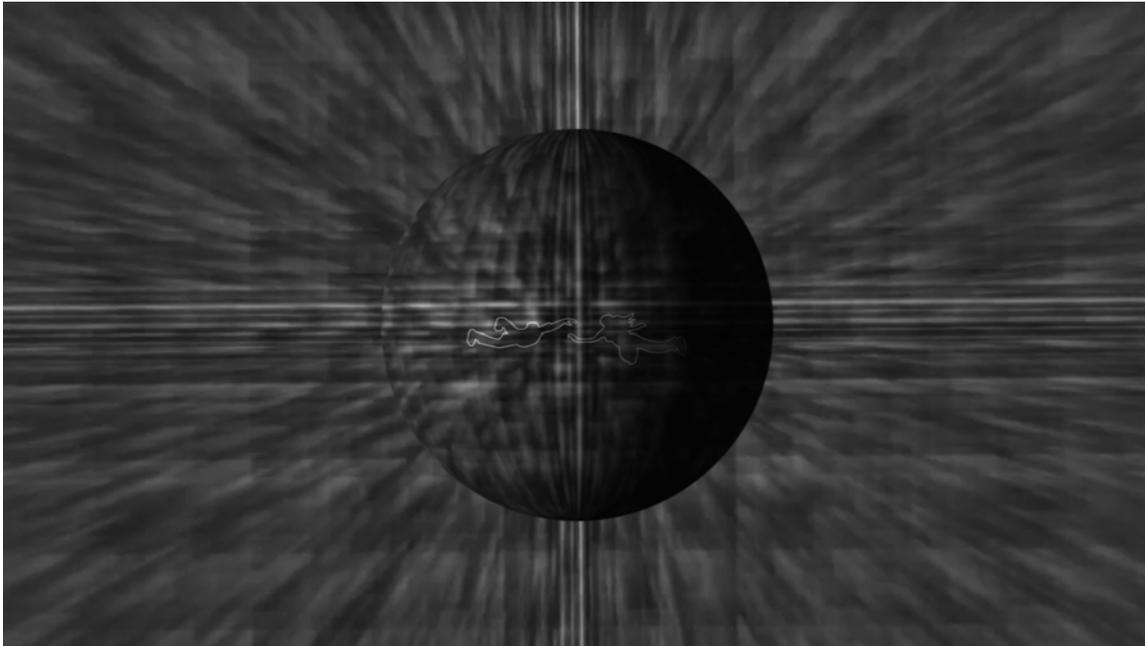


Figure 33. Aufbruch in die 720°-Welt: Alice und Bob in der Quantendimension.

Bob: Alice... ?

Alice: Bob, Du hast es geschafft?

Bob: Ich glaub, ich seh alles doppelt...

Alice: Nein, nein - es ist alles ganz einfach -

Bob: Ich weiß nicht mehr, wo ich bin...

Alice: Omega, wo ist die ganze Zeit geblieben?